

2 Fourier-Transformationen in einer und mehreren Dimensionen

2.1 Einleitung

Die Fourier-Transformation (FT) spielt eine große Rolle in der Physik. Mit ihrer Hilfe können komplizierte mathematische Operationen, wie Faltungen und Korrelationen, bequem und elegant durchgeführt werden. Viele physikalische Prozesse der Quantenmechanik, Thermodynamik, Optik etc. lassen sich mit Hilfe der FT leichter darstellen. Einen besonderen Aufschwung hat die Anwendung dieser Methode in der Datenverarbeitung mit dem Aufkommen leistungsfähiger Datenverarbeitungsanlagen und der Entdeckung schneller "FFT"- (Fast Fourier Transform) - Algorithmen gefunden.

Dieser Abschnitt soll stichwortartig in die Theorie und in die Praxis der Fouriertransformation einführen und die für die Interferometrie benötigten Grundlagen bilden. Für ein gründliches Studium ihrer Grundlagen und Anwendungen sei auf die in Abschnitt I angegebene Literaturen hingewiesen.

2.2 Fourier-Transformationen

2.2.1 Grundlegende Eigenschaften

2.2.1.1 Definition

Wir betrachten eine i. a. komplexwertige Funktion $f(x)$ einer reellwertigen Variablen $x \in [-\infty, +\infty]$. Die Funktion

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi i s x) dx \quad (2.1)$$

heißt *Fourier-Transformierte* (FT) von $f(x)$. Sie existiert, wenn $f(x)$ absolut integrierbar ist und höchstens abzählbar unendlich viele Nullstellen und Unstetigkeiten hat. Es gilt $i = \sqrt{-1}$. Die (reelle) Koordinate s heißt *Frequenz*.

Die Umkehrung von (2.1) ergibt sich dann mit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s) \exp(+2\pi i s x) dx \quad (5.2)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir den *Fourier-Operator* ein:

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \mathbf{F}^- [f(x)] \\ f(x) &= \mathbf{F}^+ [\hat{f}(s)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Das Symbol $\mathbf{F}^\pm[\dots]$ symbolisiert daher die Anwendung der Integration über das Argument der Funktion in eckigen Klammern, das hochgestellte Vorzeichen gibt das Vorzeichen in dem Exponentialkern des Integranden an. Es gelten folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^\pm [\mathbf{F}^\pm [f(x)]] &= f(-x) \\ \mathbf{F}^\pm [\mathbf{F}^\pm [\mathbf{F}^\pm [\mathbf{F}^\pm [f(x)]]]] &= f(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wir nennen

- den Raum der Koordinaten x den *direkten* oder *Ortsraum*,
- den Raum der Koordinaten s den *dualen* oder *Frequenzraum*.

2.2.1.2 Fourier-Transformationen in mehreren Dimensionen

Die Erweiterung auf N -dimensionale Orts- und Frequenz-Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}$$

ergibt sich zwanglos durch die Einführung von Skalarprodukten in die Gleichungen (2.1) und (2.2),

$$\hat{f}(\vec{s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \exp(-2\pi i \vec{s} \cdot \vec{x}) d\vec{x},$$

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\vec{s}) \exp(-2\pi i \vec{s} \cdot \vec{x}) d\vec{s}$$
(2.5)

Die Integration erfolgt über den Koordinaten entsprechend viele Dimensionen.

Typische Beispiele für die Anwendung von FT in

- einer Dimension sind Funktionen der Zeit $f(t)$ und ihre (zeitlichen) Spektren $F(\omega)$,
- zwei Dimensionen sind Verteilungen der Intensität (Bildraten, Verarbeitung von Bildinformationen)
- drei Dimensionen sind die statistische Analyse (dreidimensionaler) skalarer Felder, oder der Dualraum in der Festkörperphysik.

2.2.1.3 Sinus- und Kosinustransformation

Der Fouriertransformation entspricht eine harmonische Zerlegung der Funktion $f(x)$. Nach der Euler'schen Formel gilt

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi i s x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos(2\pi s x) - i \sin(2\pi s x)) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi s x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi s x) dx$$
(2.6)

Hieraus ergibt sich, daß $\hat{f}(s)$ i. a. komplexwertig ist, selbst wenn $f(x)$ eine reelle Funktion ist. Der Realteil von $\hat{f}(s)$ entspricht der *Kosinustransformierten*, der Imaginärteil der (negativen) *Sinustransformierten* von $f(x)$.

2.2.2 Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation

FTs haben eine Reihe sehr nützlicher Eigenschaften, die hier näher beschrieben werden. In den meisten Fällen gelten diese für Koordinaten beliebiger Dimension entsprechend.

2.2.2.1 Linearität

Die Fouriertransformation ist eine lineare Operation. Seien f und g zwei komplexe Funktionen von x und a eine komplexe Zahl, so gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\pm}[f(x) + g(x)] &= \mathbf{F}^{\pm}[f(x)] + \mathbf{F}^{\pm}[g(x)] \\ \mathbf{F}^{\pm}[a f(x)] &= a \mathbf{F}^{\pm}[f(x)]\end{aligned}\quad (2.7)$$

2.2.2.2 Symmetrie

Jede Funktion $f(x)$ läßt sich in eine gerade und ungerade Komponente zerlegen,

$$f(x) = e(x) + o(x), \text{ so daß } e(-x) = e(x) \text{ und } o(-x) = -o(x) \quad (2.8)$$

Aus (5.6) ergibt sich, daß gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\pm}[e(x)] &= \Re\{\mathbf{F}^{\pm}[f(x)]\} \\ \mathbf{F}^{\pm}[o(x)] &= \Im\{\mathbf{F}^{\pm}[f(x)]\},\end{aligned}\quad (2.9)$$

wobei $\Re\{\dots\}$ den Realteil und $\Im\{\dots\}$ den Imaginärteil des Arguments bezeichnen.

Damit hat eine gerade Funktion eine reelle FT und eine ungerade Funktion eine rein imaginäre FT. Genauso kann man zeigen, daß die FT einer reellen Funktion *hermitesch* ist. Bezeichnet \hat{f}^* die zu \hat{f} konjugiert komplexe Funktion, so gilt

$$\hat{f}(s) = \mathbf{F}^{-}[f(x) \in \Re] \Rightarrow \hat{f}(-s) = \hat{f}^*(s) . \quad (2.10)$$

2.2.2.3 Lineare Koordinatentransformation

Die Skalierung der Koordinaten beeinflusst die Fouriertransformierten in inverser Weise. Die Dehnung der Skala im direkten Raum führt zur Stauchung im dualen Raum. Ist a eine reelle, positive Zahl, so gilt für Koordinatenräume der Dimension n

$$\mathbf{F}^{\pm}[f(\vec{x})] = \hat{f}(\vec{s}) \Rightarrow \mathbf{F}^{\pm}[f(a\vec{x})] = \frac{1}{a^n} \hat{f}\left(\frac{\vec{s}}{a}\right). \quad (2.11)$$

Die Translation der Koordinaten um einen Wert a im direkten Raum erzeugt einen komplexen Faktor im dualen Raum:

$$\mathbf{F}^{\pm}[f(x)] = \hat{f}(s) \Rightarrow \mathbf{F}^{\pm}[f(x+a)] = \exp(\pm 2\pi i a s) \hat{f}(s). \quad (2.12)$$

2.2.3 Einige Beispiele eindimensionaler Fouriertransformationen

Nach dem Baukasten-Prinzip lassen sich viele nützliche Funktionen aus einigen einfachen Komponenten zusammensetzen. Die Eigenschaften der Fourier-Transformation ermöglicht einen eleganten Zugang zum Verständnis komplexer Sachverhalte. Dazu ist es gut, die Fouriertransformierte der Komponenten zu kennen, um aus ihnen mittels der Linearität komplexere Transformierte algebraisch abzuleiten.

2.2.3.1 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen stellen die Basisfunktionen der Fourier-Zerlegung dar. Ihre Transformationen sind daher besonders einfach.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-}[\cos \pi x] &= \frac{1}{2} \left(\delta\left(s + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(s - \frac{1}{2}\right) \right) \\ \mathbf{F}^{-}[\sin \pi x] &= \frac{i}{2} \left(\delta\left(s + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(s - \frac{1}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Funktion $\delta(s)$ bezeichnet die *Dirac'sche Delta-Funktion* (Distribution). Die Sinus- und Kosinus-Funktionen haben nur einen Beitrag bei $s = \pm \frac{1}{2}$. Mit Hilfe der Regel (2.11) und den Eigenschaften von $\delta(s)$ lassen sich die Transformierte trigonometrischer Funktionen für beliebige Perioden berechnen.

2.2.3.2 Gauss-Funktion

Die Gauss-Funktion ist ein Beispiel für eine Funktion, die ihre eigene Fourier-Transformierte ist:

$$\mathbf{F}^{-1}[\exp-\pi x^2] = \exp-\pi s^2. \quad (2.14)$$

Unter Anwendung von (5.11) erhält man die Skalierungsregel

$$\mathbf{F}^{-1}[\exp-a\pi x^2] = \frac{1}{|a|} \exp-\pi \left(\frac{s}{a}\right)^2. \quad (2.14a)$$

Hier sieht man die Reziprozität der Fouriertransformation besonders deutlich.

2.2.3.3 Konstanten

Machen wir den Übergang $\lim_{a \rightarrow 0} \exp-a\pi x^2 = 1$, so erhalten wir für die Fouriertransformierte

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{F}^{-1}[\exp-a\pi x^2] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \exp-\pi \left(\frac{s}{a}\right)^2 = \delta(s). \quad (2.15)$$

Die Konstante und die Dirac'sche Delta-Funktion sind also ein Fourier-Paar.

2.2.3.4 Kasten-Funktion

Die Kasten-Funktion ist nützlich, um endliche, d. h. zeitlich oder räumlich begrenzte Prozesse zu beschreiben. Sie ist definiert mit

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.16)$$

Ihre FT ist die *Sinc-Funktion*

$$\mathbf{F}^{-1}[\Pi(x)] = \frac{\sin \pi s}{\pi s} = \text{sinc } s \quad (2.17)$$

Trotz des verschwindenden Nenners bleibt die Sinc-Funktion im Ursprung endlich.

2.2.3.5 Dirac-Kamm

Die Kamm-Funktion oder Dirac-Kamm ist ein nützliches Konstrukt zur Darstellung periodischer Vorgänge. Wie die Gauss-Funktion ist sie ihre eigene FT:

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{F}^{-1}[\text{III}(x)] = \text{III}(s). \quad (2.19)$$

Auch hier ist bei Anwendung der Skalierungs-Regel zu berücksichtigen, daß beim Spreizen des Kamms im direkten Raum die Zinken des Kamms im dualen Raum zusammenrücken und umgekehrt.

2.2.4 Einige Beispiele zweidimensionaler Fouriertransformationen

Viele zweidimensionale Funktionen und Distributionen der Variablen x und y lassen sich aus eindimensionalen Funktionen konstruieren. Häufig ergeben sich die zugehörigen Fourier-Transformierte ganz zwanglos aus den FTs der eindimensionalen Komponenten. Ganz verständlich werden die zweidimensionalen Eigenschaften aber erst mit Hilfe der Faltungssätze des nächsten Kapitels.

2.2.4.1 Zweidimensionale Kastenfunktion

Analog zu (5.16) ist die zweidimensionale Kastenfunktion definiert mit

$$\Pi_2(x, y) = \Pi(x) \cdot \Pi(y), \quad (2.20)$$

d. h. sie ist 1 wenn sowohl x als auch y vom Betrag her kleiner $1/2$ sind. Die Fouriertransformierte ist gegeben mit

$$\mathbf{F}^{-1}[\Pi_2(x, y)] = \text{sinc } s \cdot \text{sinc } t. \quad (2.21)$$

2.2.4.2 Zylinderfunktion

Die Zylinderfunktion ist die kreissymmetrische Variante der Kastenfunktion. Sie ist definiert mit

$$\Pi(r) = \Pi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.22)$$

Die FT ist ähnlich wie die Sinc-Funktion durch eine Besselfunktion 1. Ordnung gegeben

$$\mathbf{F}^{-1} \left[\Pi(\sqrt{x^2 + y^2}) \right] = \frac{J_1(\pi \sqrt{s^2 + t^2})}{\sqrt{s^2 + t^2}} \quad (2.23)$$

2.2.4.3 Dirac'sches Nagelbrett

Diese Funktion ist die zweidimensionale Variante des Dirac'schen Kamms,

$$\text{III}_2(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_2(x - m, y - n). \quad (5.24)$$

Sie ist ihre eigene FT,

$$\mathbf{F}^{-1} [\text{III}_2(x, y)] = \text{III}_2(s, t). \quad (5.25)$$

Die zweidimensionale Deltafunktion läßt sich analog zu (2.15) definieren.

2.2.4.4 Zweidimensionale Gaussfunktion

Auch diese Funktion ist ihre eigene FT. Sie leitet sich zwanglos aus der eindimensionalen Gaussfunktion ab.

$$\mathbf{F}^{-1} \left[\exp - \pi(x^2 + y^2) \right] = \exp - \pi(s^2 + t^2). \quad (2.26)$$

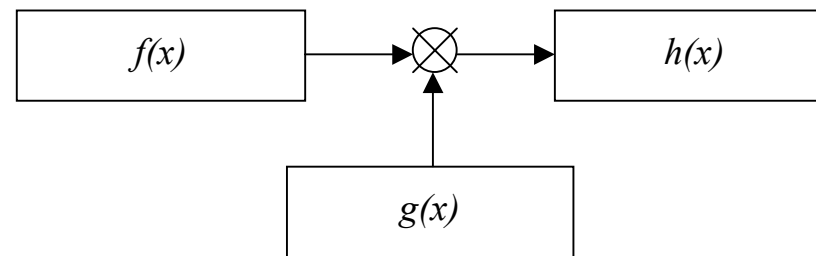
2.2.5 Sätze für und Eigenschaften von Fouriertransformationen

2.2.5.1 Faltung und Korrelation

Die **Faltung** \otimes zweier (u. U. komplexer) Funktionen f und g ist gegeben mit

$$h(x) = f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du. \quad (2.27)$$

Die Faltung beschreibt eine lineare Operation angewandt auf die Funktion f durch die Funktion g . Sie beschreibt in vielen physikalischen Systemen die Antwort eines Systems auf eine Eingabefunktion f , während die Systemübertragung durch g beschrieben ist.



Die **Korrelation** $*$ ist zweier komplexer Funktionen f und g ähnlich definiert wie die Faltung. Das Resultat ist die *Kreuzkovarianzfunktion*:

$$C_{fg}(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(u)g(u+x)du. \quad (2.28)$$

Die **Autokorrelation** einer Funktion f resultiert analog in die *Autokovarianzfunktion*

$$AC_f(x) = f(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(u) f(u+x) du. \quad (2.29)$$

Faltungs- und Korrelationsintegral haben folgende interessante Eigenschaften der Fouriertransformierten,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-}[f \otimes g] &= \hat{f} \hat{g} \\ \mathbf{F}^{-}[f * g] &= \hat{f}^* \hat{g} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Offenbar läßt sich die Faltung bzw. Korrelation in einer Domäne durch ein Produkt von Funktionen in der anderen Domäne ausdrücken. Auf diese Weise lassen sich Fouriertransformationen komplizierter Zusammenhänge einfach finden.

Insbesondere gilt der *Satz über die Autokorrelation* (Wiener-Khinchine):

$$\mathbf{F}^{-}[f * f] = \hat{f}^* \hat{f} = |\hat{f}|^2. \quad (2.31)$$

2.2.5.2 Satz von Parseval (Rayleigh)

Dieser Satz besagt, daß die Norm einer Funktion und ihrer Transformierten gleich sind,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds. \quad (2.32)$$

2.2.5.3 Spektrale Leistungsdichte

Als *Spektrale Leistungsdichte* (*power spectrum*) bezeichnet man das Betragsquadrat der Fourier-Transformierten einer Funktion f :

$$S_f(s) = |\mathbf{F}^{-}[f(x)]|^2 = |\hat{f}(s)|^2 = \hat{f}^*(s) \hat{f}(s) \quad (2.33)$$

Sie ist die Fouriertransformierte der Autokorrelation (siehe (2.31)) und das Quadrat des (komplexen) Betrags der Fourier-Transformierten.

Das (komplexe) Argument der Transformaten bezeichnet man auch als das *Phasenspektrum*

$$\Phi_f(s) = \arctan \frac{\Im\{\hat{f}\}}{\Re\{\hat{f}\}}. \quad (2.34)$$

Aus (2.29) und (2.30) ergibt sich, daß sich die Autokorrelation einer Funktion durch die inverse Fourier-Transformation ihrer spektralen Leistungsdichte beschreiben läßt (*Satz von Wiener-Khinchine*),

$$AC_f(x) = \mathbf{F}^+[S_f(s)] = \mathbf{F}^+[\hat{f}^*(s)\hat{f}(s)]. \quad (2.35)$$

Die Fourier-Transformation bietet daher eine einfache Möglichkeit, Autokorrelationen von Funktionen zu berechnen. Der Zusammenhang zwischen einer Funktion, ihrer Fourier-Transformaten, ihrer Autokovarianz und ihrer spektralen Leistungsdichte ist im folgenden grafisch dargestellt.

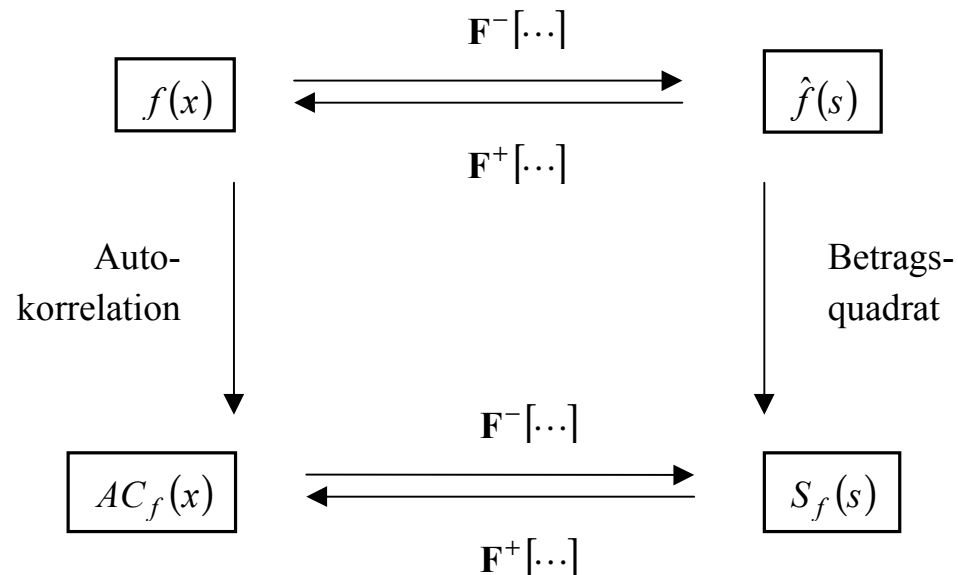


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformaten, des Leistungsspektrums und der Autokorrelation einer Funktion f .

Man beachte, daß der Prozeß der Autokorrelation bzw. der Bildung des Betragsquadrates i. A. nicht umkehrbar ist; d. h. die Autokovarianzfunktion bzw. das Spektrum enthalten generell weniger Information als die Funktion f bzw. ihre Fourier-Transformierte.

2.2.5.4 Kreuzkorrelation und Kreuzspektrum

Das *Kreuzspektrum* zweier Funktionen f und g ist das Produkt

$$CS_{fg}(s) = \frac{\hat{f}^*(s)\hat{g}(s)}{\sqrt{\int |\hat{f}(s)|^2 ds \int |\hat{g}(s)|^2 ds}} \quad (2.36)$$

(s. a. (2.30)). Es ist die Fouriertransformierte der (normierten) *Kreuzkorrelationsfunktion*

$$\gamma_{fg}(x) = \frac{C_{fg}(x)}{\sqrt{\int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx}}. \quad (2.37)$$

Diese entspricht der Kreuzkovarianzfunktion (2.28) mit Ausnahme der Normierung, welche bewirkt, daß $|\gamma_{fg}(s)| \leq 1$ gilt.

Für reellwertige Funktionen f und g entspricht die Kreuzkorrelationsfunktion dem (linearen) Korrelationskoeffizienten der Funktionswerte für eine relative Verschiebung der Funktionen um x . Man kann daher ein translationsinvariantes Maß für die Ähnlichkeit zweier Funktionen finden, wenn man das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion sucht. Die Ablage des Maximums vom Ursprung ergibt somit das Maß für die relative Verschiebung der beiden Funktionen von der Position optimaler "Gleichheit". Die Fourier-Transformation erlaubt eine schnelle und bequeme Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion.

2.2.6 Physikalische Größen und Fourier-Transformation

Physikalische Messungen, die der Fourier-Transformation zur Analyse unterworfen werden sollen, sind im allgemeinen reellwertig (z. B. elektrische Spannung als $f(t)$, Intensitätsverteilung $I(\vec{x})$ in zwei Dimensionen eines Matrix-Detektors). Ihre Fourier-Transformierte sind daher hermitesch (s. Abschnitt 2.2.2.2). Im Prinzip reicht die Angabe von $\hat{f}(s)$ für positive Frequenzen bei einer Dimension bzw. für eine Halbebene des Frequenzraums \vec{s} bei zwei Dimensionen, um eine vollständige Beschreibung der Transformierten zu erhalten. Die Information im Spektrum ist daher *redundant*.

Eine weitere Einschränkung ergibt sich, daß die FT für Funktionen einer kontinuierlichen, sich bis ins Unendliche erstreckenden Variablen x definiert ist. Der Meßprozeß hat aber generell eine endliche Auflösung der Variablen (feinere Strukturen des beobachteten Prozesses können meßtechnisch oder aus grundlegenden, physikalischen Gegebenheiten nicht erfaßt werden) sowie eine beschränkte Überdeckung des Variablenbereichs. Beides hat Einflüsse auf die Fourier-Transformation.

2.2.6.1 Beschränkung der Auflösung

Wir betrachten einen physikalischen Prozeß f , welcher mit einer Apparatur H beobachtet wird und die Meßgröße f' ergibt: $f \xrightarrow{H} f'$. Wir nehmen an, daß der Einfluß der Apparatur linear und homogen ist, d. h.

$$h = af + bg \Rightarrow h' = af' + bg'$$

$$f(x + \delta) \xrightarrow{H} f'(x + \delta) \quad (2.38)$$

In diesem Fall läßt sich der Einfluß der Apparatur durch eine Apparatfunktion $h(x)$ so darstellen, daß das gemessene Signal sich aus dem Prozeß durch eine Faltung mit der Apparatfunktion ergibt

$$f'(x) = f(x) \otimes h(x) . \quad (2.39)$$

Gemäß (2.30) kann man die FT der gemessenen Größe als das Produkt der FT des Prozesses mit der FT $\hat{h}(s)$ der Apparatfunktion darstellen

$$\hat{f}'(s) = \hat{f}(s) \cdot \hat{h}(s) . \quad (2.40)$$

Man nennt $\hat{h}(s)$ auch die *Übertragungsfunktion* des Apparates.

Reale physikalische Meßinstrumente haben eine begrenzte Auflösung so, daß die Übertragungsfunktion für Frequenzen oberhalb einer Grenze s_c identisch verschwindet (*Grenzfrequenz* oder *cutoff*),

$$\hat{h}(s) \equiv 0 \quad \text{für } |s| \geq s_c . \quad (5.41)$$

Dies hat einen Informationsverlust insoweit zufolge, wie der ursprüngliche Prozeß Beiträge für Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz hat. Man versucht daher, den Meßprozeß so zu gestalten, daß der Verlust an für die Fragestellung relevanter Information möglichst gering ist.

Bei Prozessen mit unendlicher Frequenzüberdeckung ist ein Informationsverlust unvermeidlich.

2.2.6.2 Begrenzte Überdeckung

Im allgemeinen erfaßt die Messung nur einen Teil des untersuchten Prozesses. Die vollständige Bestimmung der FT ist daher nicht möglich, da die Integration in (2.1) sich in das Unendliche fortsetzt. Ein Beispiel soll die Konsequenzen verdeutlichen.

Man nehme einen zeitlichen Prozeß $f(t)$ an, welcher mit unendlich hoher zeitlicher Auflösung, aber nur in einem Intervall der Länge T erfaßt wird. Außerhalb dieses Intervalls gibt es keine Meßwerte. Man kann daher das Integral

$$\hat{f}'(s) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \exp(-2\pi i s t) dt \quad (2.42)$$

berechnen und das Resultat als *Schätzung* der FT $\hat{f}(s)$ akzeptieren. (2.42) ist dem Integral

$$\hat{f}'(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h(t) \exp(-2\pi i s t) dt \quad (2.43)$$

äquivalent, mit der Apparatfunktion

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right). \quad (2.44)$$

Unter Verwendung von (2.17) und (2.27) ergibt sich das Faltungsintegral

$$\hat{f}'(s) = \hat{f}(s) \otimes \hat{h}(s) = \hat{f}(s) \otimes T \operatorname{sinc}(Ts). \quad (2.45)$$

Die abgeschätzte FT des Prozesses ist also die durch die FT der Apparatfunktion per Faltung verschmierte FT des ursprünglichen Prozesses. Die Einschränkung der Überdeckung im direkten Raum führt daher zu Reduzierung der Auflösung im dualen Raum.

2.2.7 Diskrete Fouriertransformation

Messungen werden heutzutage häufig *diskretisiert*, um sie der digitalen Analyse mit dem Computer zugänglich zu machen. Die Diskretisierung erfolgt im Variablen- wie im Wertebereich. Im ersteren Falle wird bei der FT der Übergang zur *diskreten FT* gemacht. Die Diskretisierung der Werte führt zu Digitalisierungsrauschen. In diesem Kapitel betrachten wir den Effekt der Diskretisierung der Variablen auf die FT.

2.2.7.1 Modell des Diskreten Detektors

Zur Beschreibung des Detektors bedienen wir uns einfachen Modells. Wir nehmen an, daß ein ein- oder mehrdimensionaler Prozeß in jeder Dimension in eine endliche Anzahl äquidistanter Intervalle zerlegt wird und über jedes Intervall der Mittelwert des Meßwertes gebildet wird. Abbildung 2 veranschaulicht die Diskretisierung. Im eindimensionalen Fall sei die Intervallgröße a , im zweidimensionalen Fall sei die Kästchengröße $a \cdot b$ ("pixel").

Für eine Dimension ergeben sich somit N Meßwerte f_j mit $j \in 0, 1, 2, \dots, N-1$, für zwei Dimensionen ergeben sich NM Meßwerte f_{jk} mit $j \in 0, 1, 2, \dots, N-1$ und $k \in 0, 1, 2, \dots, M-1$.

Ein kontinuierlicher Prozeß $f(x)$ bzw. $f(x, y)$ wird von dem Detektor wie folgt erfaßt:

1. Die Bildung eines gleitenden Mittelwertes über das Intervall bzw. pixel läßt sich durch die Faltung mit einer Kastenfunktion $\Pi(x/a)$ bzw. $\Pi_2(x/a, y/b)$ darstellen:

$$\tilde{f}(x) = f(x) \otimes \Pi(x/a). \quad (2.46)$$

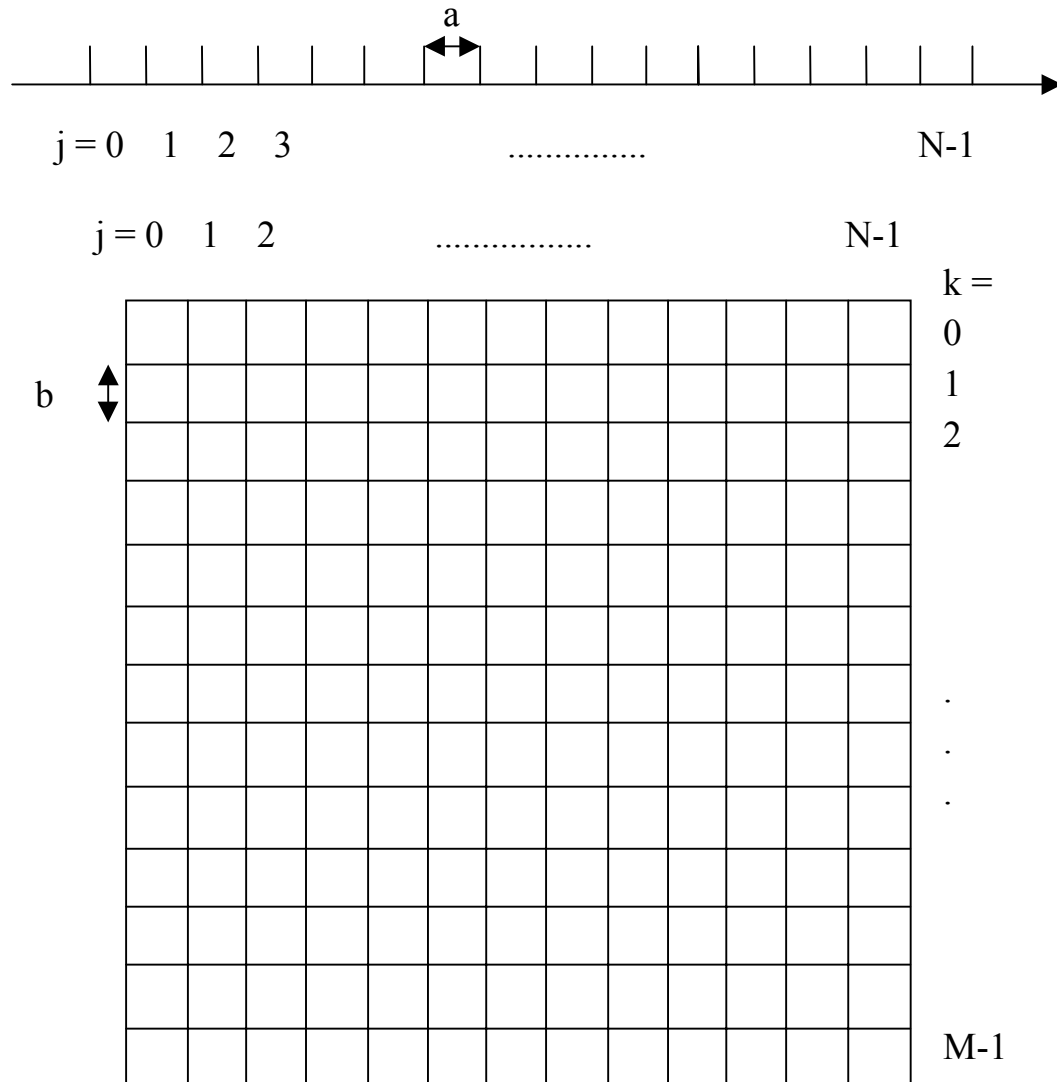


Abbildung 2: Diskretisierung der Variablen in einer Dimension (oben) und zwei Dimensionen (unten).

2. Die Diskretisierung erfolgt durch Multiplikation von (2.46) mit einer Kamm-Funktion (2.18). Hiermit werden aus dem gleitenden Mittelwert genau die auf die Intervalle zentrierten Mittelwerte herausgenommen:

$$f_j = \tilde{f}(x) \cdot \text{III}(x/a) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) \cdot \delta\left(\frac{x-j}{a}\right). \quad (2.47)$$

3. Schließlich wird die Zahl der Meßwerte durch Multiplikation mit weiteren Kastenfunktion von der Größe des überdeckten Bereichs auf die Gesamtzahl eingeschränkt:

$$\begin{aligned} f_j &= [\tilde{f}(x) \cdot \text{III}(x/a)] \cdot \Pi\left(\frac{x}{Na}\right) \\ &= f_j, \quad j=0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Die Gleichungen (2.46) bis (2.48) gelten völlig analog für mehrere Dimensionen.

Betrachtet man die FT schrittweise von (2.46) bis (2.48), so ergibt sich folgende Situation:

1. Die Bildung des gleitenden Mittels resultiert im Fourierraum in einem Produkt der FT des Prozesses mit einer sinc-Funktion. Hiermit ist eine Reduktion der FT bei hohen Frequenzen $s > 1/a$ verbunden.

$$\hat{\tilde{f}}(s) = a \hat{f}(s) \cdot \text{sinc}(as) \quad (2.49)$$

2. Das durch die Diskretisierung entstehende Produkt mit der Kammfunktion hat die Faltung von (2.49) mit einer Kammfunktion im Fourierraum zufolge. Diese reproduziert die bandbegrenzte FT im Frequenzraum im Abstand $1/a$ (*Aliasspektren*):

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= a \hat{\tilde{f}}(s) \otimes \text{III}(as) \\ &= a^2 [\tilde{f}(s) \cdot \text{sinc}(as)] \otimes \text{III}(as) \\ &= a^2 [\tilde{f}(s) \cdot \text{sinc}(as)] \otimes \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(a(s-k)) \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

3. Zuletzt sorgt die Multiplikation im direkten Raum mit der Überdeckungsfunktion für eine weitere Faltungsoperation im Fourierraum. Diese reduziert die Auflösung in der FT:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{f}}(s) &= Na \hat{f}(s) \otimes \text{sinc}(Nas) \\ &= Na^3 \left\{ \left[\hat{f}(s) \cdot \text{sinc}(Nas) \right] \otimes \text{III}(as) \right\} \otimes \text{sinc}(Nas)\end{aligned}\quad (2.51)$$

Damit ist das Resultat im Fourierraum immer noch eine kontinuierliche Funktion der Frequenz. Dies ist eine Konsequenz der Darstellung der Einschränkung durch die Kastenfunktion in (2.48), welche für alle x definiert ist. Selbstverständlich lassen sich digital FTs ebenfalls nur diskret darstellen, die wir mit der Methode der *periodischen Fortsetzung* einführen. Dazu wiederholen wir den eingeschränkten Datenbereich (2.48) mit der Periode Na unendlich oft durch Faltung mit einer geeigneten Kammfunktion:

$$f_j = \left\{ \left[\tilde{f}(x) \cdot \text{III}(x/a) \right] \cdot \Pi\left(\frac{x}{Na}\right) \right\} \otimes \text{III}\left(\frac{x}{Na}\right) \quad j = -\infty, \dots, +\infty . \quad (2.52)$$

Dieser Vorgang entspricht einer Änderung der Topologie des Variablenbereichs von einem ins Unendliche reichenden Intervall zu einem l -Torus.

Die FT wird nun mit einer Kammfunktion multipliziert. Dies führt zu ihrer Diskretisierung:

$$\begin{aligned}\hat{f}_l &= Na \hat{\tilde{f}}(s) \cdot \text{III}(Nas) \\ &= N^2 a^4 \left(\left[\hat{f}(s) \cdot \text{sinc}(Nas) \right] \otimes \text{III}(as) \right) \otimes \text{sinc}(Nas) \cdot \text{III}(Nas) \\ &= N^2 a^4 \left(\left[\hat{f}(s) \cdot \text{sinc}(Nas) \right] \otimes \text{III}(as) \right) \otimes \text{sinc}(Nas) \cdot \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(Na(s-l)) \right)\end{aligned}\quad (2.53)$$

Wir verfügen nun über zwei diskrete Datensätze f_j und \hat{f}_l , deren Indices die Werte aller ganzen Zahlen annehmen können. Jeder Satz hat aber nur N unabhängige Werte! Es reicht also, die Funktionswerte nur für die Indices

$$\begin{aligned} j &= 0, \dots, N-1 \\ l &= 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.54)$$

anzugeben.

Wir fassen noch einmal alle Schritte der Diskretisierung in beiden Domänen zusammen:

$$f_j = \left\{ [(f(x) \otimes \Pi(x/a)) \cdot \text{III}(x/a)] \cdot \Pi\left(\frac{x}{Na}\right) \right\} \otimes \text{III}\left(\frac{x}{Na}\right). \quad (2.55)$$

$$\hat{f}_l = N^2 a^4 \left\{ [\hat{f}(s) \cdot \text{sinc}(Nas)] \otimes \text{III}(as) \right\} \otimes \text{sinc}(Nas) \cdot \text{III}(Nas) \quad (2.56)$$

Die hier in einer Dimension gemachten Ableitungen gelten völlig analog für mehrere Dimensionen. Die Funktionen und Distributionen sind durch entsprechende mehrdimensionale Ausdrücke zu ersetzen.

2.2.7.2 Die diskrete Fouriertransformation

Die diskrete Fouriertransformation (DFT) läßt sich nun darstellen durch die Summe

$$\hat{f}_l = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp\left(-2\pi i \frac{jl}{N}\right) \quad (2.57)$$

Entsprechen ist die inverse diskrete Fouriertransformation gegeben mit

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \exp\left(2\pi i \frac{jl}{N}\right) \quad (2.58)$$

In jedem Falle ergeben sich N lineare Gleichungen mit N Summanden.

2.2.7.3 Fast Fourier Transformation

Ordnet man die Datenmengen als Spaltenvektoren

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \hat{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \hat{f}_0 \\ \vdots \\ \hat{f}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

an, so lassen sich (2.57) und (2.58) als Matrixgleichungen schreiben

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{W}^- \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{W}^+ \hat{\mathbf{f}} \quad (2.60)$$

wobei

$$\mathbf{W}^\pm = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \exp(\pm 2\pi i \frac{1}{N}) & \dots & \exp(\pm 2\pi i \frac{N-1}{N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \exp(\pm 2\pi i \frac{N-1}{N}) & \dots & \exp(\pm 2\pi i \frac{(N-1)^2}{N}) \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

eine von den Daten unabhängige Koeffizientenmatrix ist.

Die Zahl der Berechnungen für die diskrete FT steigt generell, unabhängig davon, ob die Daten äquidistant sind oder nicht, mit N^2 . Bei äquidistanten Datensätzen - die wir hier voraussetzen - zeigt es sich, daß die Matrix \mathbf{W} sich zerlegen läßt in ein Produkt von Matrizen, welche für sich sehr einfach strukturiert sind und sich schnell berechnen lassen. Diese Zerlegung heißt *Fast Fourier Transform* (FFT) und läßt sich für beliebige N angeben.

Ist N z. B. eine Potenz von 2 ($N = 2^k$), so ergeben sich statt N^2 nur kN Berechnungen mit der FFT. Der Gewinn kann sehr groß sein.

Zahl N der Werte	Berechnungen DFT	Berechnungen FFT
1024 ($= 2^{10}$)	1048576	10240
32768	$1.074 \cdot 10^{10}$	491520
1024^2	$1.1 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^6$