Einführung in die Astronomie und Astrophysik I, WS 2009/10

Dozenten: H. Beuther & Ch. Fendt, Tutoren: L. Burtscher & O. Porth

Lösung zur 4. Übung

Besprechung am 18.11.2009 (Gruppen Ia und IIa) und am 25.11.2009 (Gruppen Ib und IIb).

1 Keplersche Gesetze

3. Keplersche Gesetz

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)} \tag{1}$$

Konstanten:

- $G = 6.6 \times 10^{-8} \ \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{gs}^2}$

(a) Sonne
Parameter des Erd-Orbits

- $P = 1\mathrm{a} = \pi \times 10^7$ s
- $a = 1AU = 1.5 \times 10^{13}$ cm

$$M_\odot = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2 G} = 2 \times 10^{33} \text{ g} \tag{2}$$

(b) Erde
Parameter des Mond-Orbits:

- $P = 27.32d = 2.4 \times 10^6$ s
- $a = 3.8 \times 10^{10}$ cm

$$M_{\mathrm{Erde}} = 5.7 \times 10^{27} \text{ g.} \tag{3}$$

(c) Jupiter
Parameter des Io-Orbits:

- $P = 1769d = 1.5 \times 10^5$ s
- $a = 4.2 \times 10^{10}$ cm

$$M_{\text{Jupiter}} = 2 \times 10^{30} \text{ g}. \tag{4}$$

Bahnradius von Kallisto

- $P = 16.689d = 1.4 \times 10^6$ s

$$a = \left(\frac{M_{\text{Jupiter}} P^2 G}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 1.9 \times 10^{11}\text{cm}. \tag{5}$$

Aber eleganter: Da es um den gleichen Zentralkörper geht, können wir die Skalierung

$$P \propto a^{3/2}, a \propto P^{2/3} \tag{6}$$

verwenden, daher

$$\frac{a_{\text{Kallisto}}}{a_{\text{Io}}} = \left(\frac{P_{\text{Kallisto}}}{P_{\text{Io}}}\right)^{2/3} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad a_{Kallisto} = a_{\text{Io}} \left(\frac{P_{\text{Kallisto}}}{P_{\text{Io}}}\right)^{2/3} = 1.9 \times 10^{11} \text{ cm}. \tag{8}$$

(d) Geostationärer Orbit
Parameter des Orbits:

- P ist der "siderische Tag" $P = 24\text{h} - 3 \text{ min} 56 \text{ s} = 86164\text{s}$
- $M_{\text{Erde}} = 5.7 \times 10^{27}$ g
- $r_{\text{Erde}} = 6.3 \times 10^8$ cm

$$a = 4.2 \times 10^9 \text{ cm} = 6.6\text{r}_{\text{Erde}} \tag{9}$$

Abdeckung der Erdoberfläche:
Geostationäre Satelliten können die Polkappen mit Breitengraden polwärts von $\alpha = \pm\arccos(1/6.6) = \pm 81.3^\circ$ nicht beobachten. Ein geostationärer Satellit alleine sieht nur die Kugelkallotte mit dem Öffnungswinkel 81.3°. Das Kugeloberflächenelement ist $dA = \frac{dV}{dr} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$, somit ergibt sich die beobachtbare Fläche

$$A_s = r_{\text{Erde}}^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{81.3^\circ} d\theta \sin\theta = 2\pi r^2 \left(1 - \cos(81.3^\circ)\right) = 2\pi r_{\text{Erde}}^2 0.848 \tag{10}$$

Der Bruchteil der beobachtbaren Fläche ist also

$$\frac{A_s}{4\pi r_{\text{Erde}}^2} = 42.4\% \ . \tag{11}$$

1.1 Drehimpuls im Sonnensystem

(a) Massenverhältniss
Der Großteil der planetaren Masse ist auf die vier äußeren Planeten aufgeteilt.

- $M_{\text{Jupiter}}/M_\odot = 1/1\,047.4$
- $M_{\text{Saturn}}/M_\odot = 1/3\,498.5$
- $M_{\text{Uranus}}/M_\odot = 1/22\,869$
- $M_{\text{Neptun}}/M_\odot = 1/19\,314$

Danach kommt die Erde mit $M_{\text{Erde}}/M_\odot = 1/328\,900.5$ (siehe z.B. Tabelle C.9 in Fundamental Astronomy von H. Karttunen)

$$\frac{\sum_p M_p}{M_\odot} = 0.00134\ . \tag{12}$$

Die Sonne ist also rund 750 mal schwerer als ihr Planetensystem.

(b) Drehimpulsverteilung
Winkelgeschwindigkeit der Sonne $\omega = 2\pi/P = 2.86 \times 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$. Drehimpuls der Sonne angenähert als homogene Kugel:

$$l = J\,\omega \tag{13}$$
$$= \frac{2}{5}\,M_\odot r_\odot^2 \omega \tag{14}$$
$$= 1.12 \times 10^{49}\,\frac{\text{g cm}^2}{\text{s}} \tag{15}$$

Für Kreisbahnen gilt

$$v_p^2 = \frac{GM_\odot}{r} \tag{16}$$

daher ist der Drehimpuls $l_p = M_p r_p v_p$

$$l_p = \sqrt{GM_\odot}\, r_p^{1/2} M_p \tag{17}$$

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
$M_p/M_\odot$	1/6 023 600.	1/408 523.5	1/328 900.5	1/3 098 710.	1/1 047.355	1/3 498.5	1/22 869.	1/19 314.
r_p/AU	0.387	0.723	1.	1.524	5.204	9.582	19.224	30.092
$l_p/(\text{g cm}^2\text{s}^{-1})$	2.87×10^{46}	5.80×10^{47}	8.47×10^{47}	1.11×10^{47}	6.07×10^{50}	2.47×10^{50}	5.34×10^{49}	7.92×10^{49}

Der Drehimpuls des Planetensystems beträgt $\sum_p l_p = 9.87 \times 10^{50}$ g cm^2s^{-1}, rund 60% davon ist im Jupiter-Orbit und 25% im Orbit des Saturn. Der orbitale Drehimpuls ist 88 mal größer als der Drehimpuls der Sonne selbst.

2 Sonnenfinsternisse auf Jupiter

Definiere zunächst den Öffnungswinkel α in der Näherung für kleine Winkel.

$$\alpha \equiv \frac{r_{\mathrm{Mond}}}{d(\mathrm{Planet}, \mathrm{Mond})} \tag{18}$$

$d(\mathrm{Planet}, \mathrm{x})$ bezeichnet den Abstand von Planet (-oberfläche) und Objekt x, r_x ist der Radius des Objekts. Der Öffnungswinkel der Sonne ist

$$\alpha_{cr} \equiv \frac{r_{\odot}}{d(\mathrm{Planet}, \odot)} \ . \tag{19}$$

Bedingung für totale Sonnenfinsternis nach Strahlensatz:

$$\alpha \geq \alpha_{crit} \tag{20}$$

Für den Jupiter gilt also

$$\alpha_{cr} = \frac{r_{\odot}}{d(\mathrm{Jupiter}, \odot)} \simeq 9 \times 10^{-5} \ . \tag{21}$$

Die Öffnungswinkel der Monde betragen 8.6×10^{-3} (Io), 4.7×10^{-3} (Europa), 4.9×10^{-3} (Ganimed) und 2.6×10^{-3} (Kallisto). Sie können also alle eine totale Sonnenfinsternis hervorrufen.