Practical Numerical Training UKNum

Interpolation, Extrapolation, Splines

Hubert Klahr and Christoph Mordasini

Max Planck Institute for Astronomy, Heidelberg

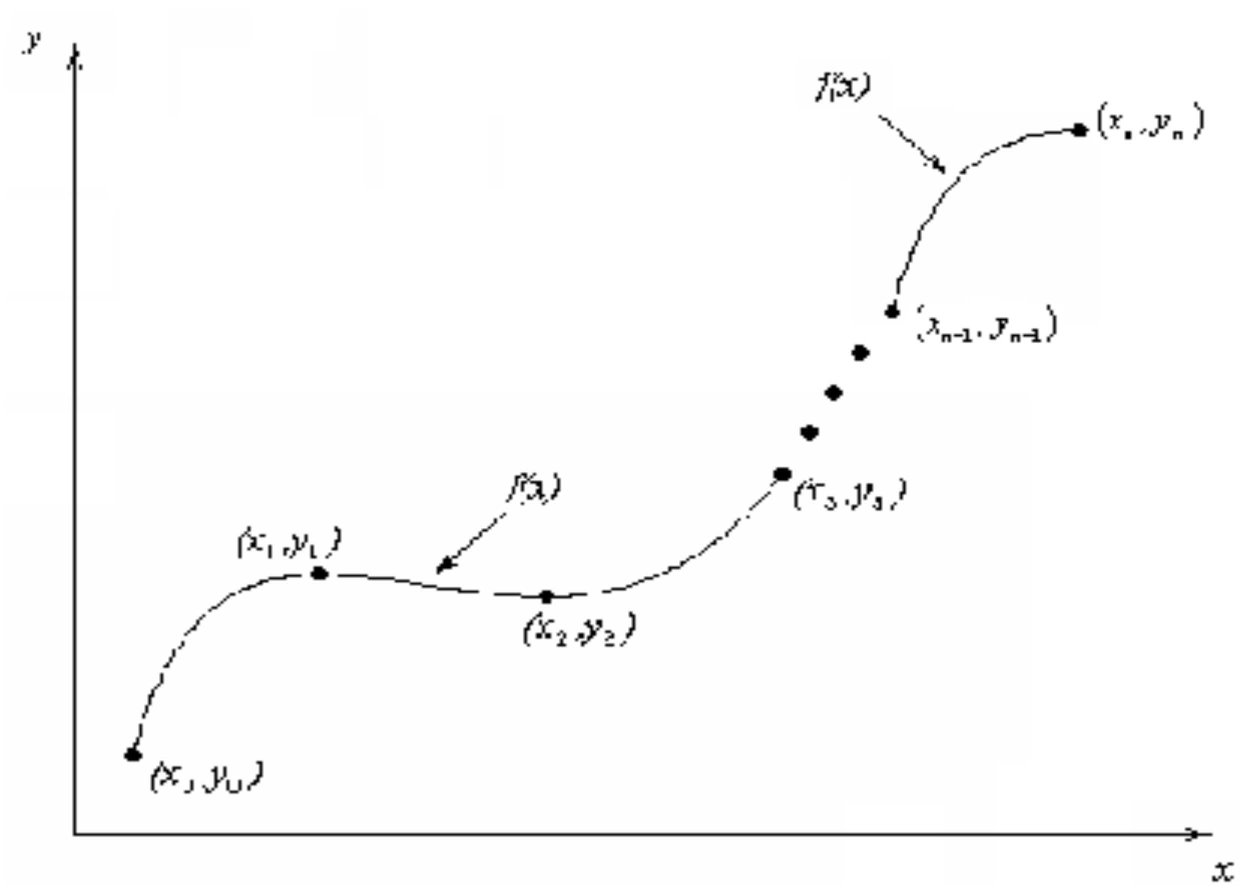
Program:

1) Einführung
2) Direkte Methode
3) Dividierte Differenzmethode
4) Splines

1 Einführung

Aufgabe

- Gegeben sei (x_0,y_0), (x_1,y_1), …… (x_n,y_n) so genannte Stützpunkte
  - Messwerte, numerische Resultate
- Wir nehmen an $x_0 < x_1 \ldots < x_N$
- Gesucht ist der Wert $y=f(x)$ an einem beliebigen Punkt x
  - Falls $x_0 \le x \le x_N$: Interpolation
  - Falls x ausserhalb des Intervalls: Extrapolation (!)



Grundprinzip

- Grundanforderung an die Interpolierende f(x)
  - $\forall\, x_i$ muss gelten $f(x_i)=y_i$

- Es gibt verschiedene Klassen von Interpolationsfunktionen
  - Polynome
  - Rationale Funktionen
  - Trigonometrisch Funktionen
  - ...

- Wichtigste Klasse: Polynome. Da einfach
  - auszuwerten
  - abzuleiten
  - zu integrieren

Polynominterpolation

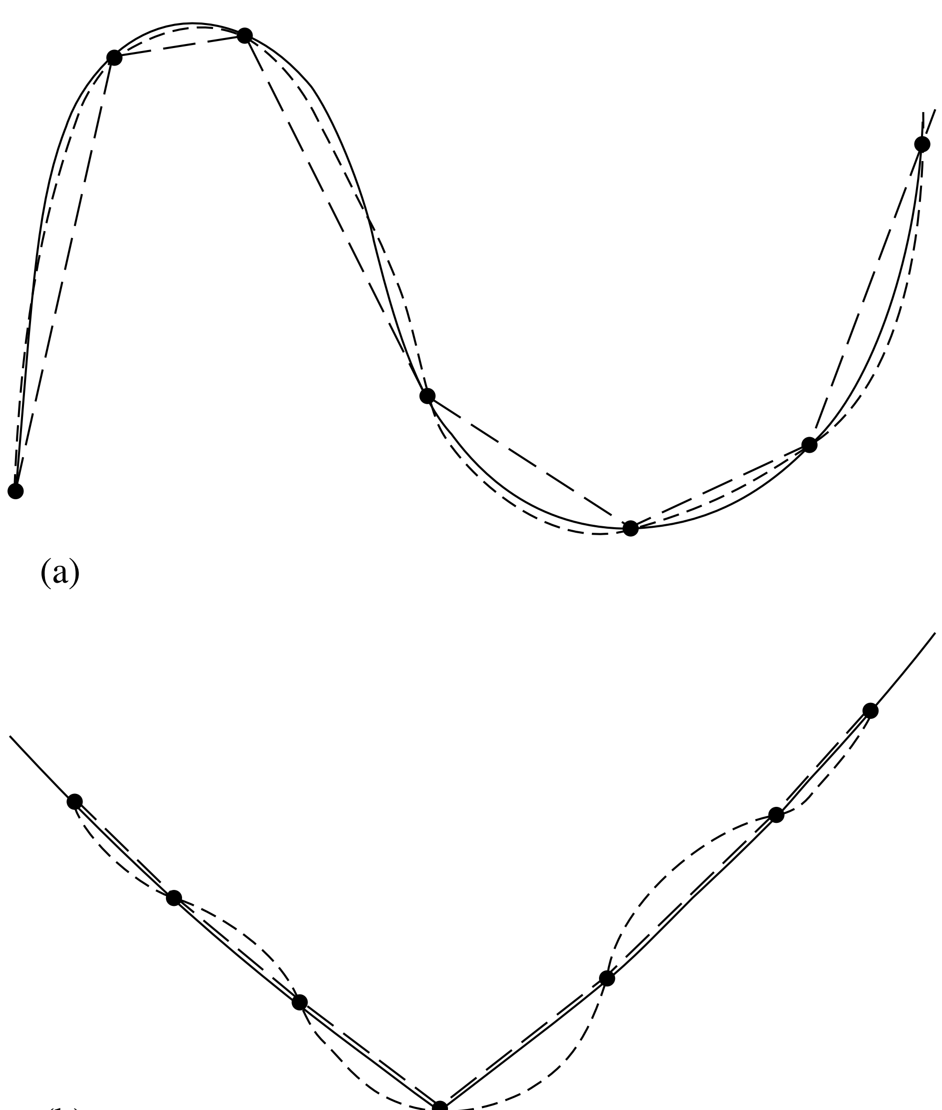
- Für n+1 paarweise verschiede Datenpunkte gibt es genau ein Interpolationspolynom n-ten Grades, das $\forall x_i$ $f(x_i)=y_i$ erfüllt.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

- 0-ter Grad: Konstante
- 1-ter Grad: Lineare Interpolation
- 2-ter Grad: Quadratische Interpolation
- 3-ter Grad: Kubische Interpolation

Empfohlener Grad

- Mit zunehmendem Grad beginnen die Polynome immer stärker zwischen den Stützstellen zu schwingen.



(a)

(b)

- Quadratisch, kubisch,oder 4-ter Ordnung empfehlenswert. Höher dagegen nicht!
- Verwende nur die Stützstellen x_i die den gesuchten Wert x umgeben. (Stückweise Interpolation, vgl. Splines später)

DEMO: Mit Mathematica

Warnung

- Eine Grundannahme der Interpolation ist dass sich die unterliegende Funktion zwischen den tabellierten Werten relativ glatt verhält.
  - Aber oft wissen wir das gerade nicht....

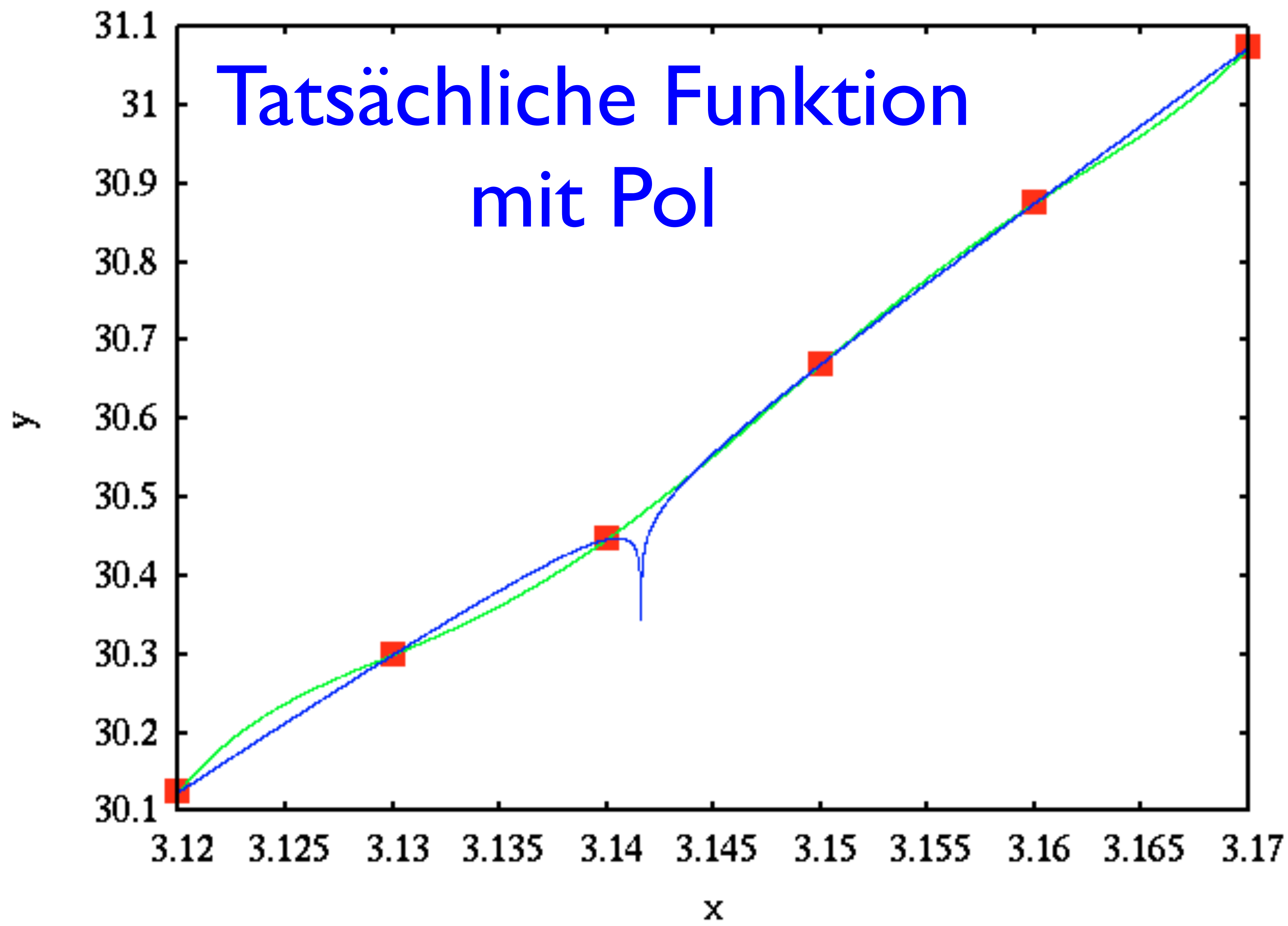
- Falls dies nicht der Fall ist, liefert die Interpolation Werte die sehr stark vom wahren Wert abweichen können.
- Beispiel:

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{\pi^4} \ln\left[(\pi - x)^2\right] + 1$$

Warnung II

- x_i=3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{\pi^4} \ln\left[(\pi - x)^2\right] + 1$$



2 Direkte Methode

Ansatz

Gegeben sind n+1 Datenpunkte (x_0,y_0), (x_1,y_1),………… (x_n,y_n)

Finde ein Polynom der Ordnung n (Standardbasis):

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x^n.$$

wobei a_0, a_1,……………… a_n reelle Konstanten sind.

- Stelle n+1 Gleichungen auf um die n+1 Konstanten zu finden
- Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & x_0^{n-2} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Polynominterpolation

- So genannte Wandermonde Matrix.

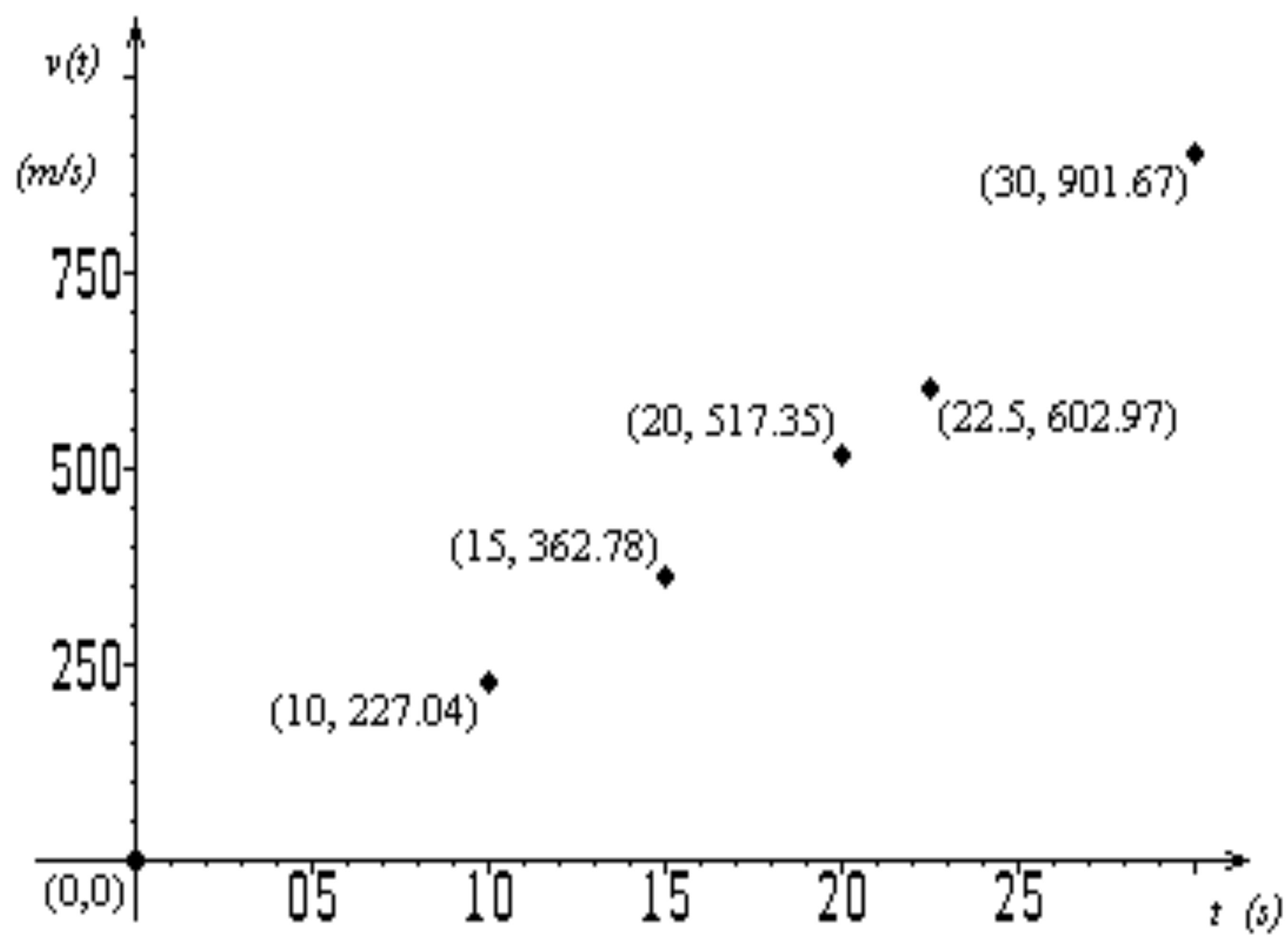
- Kann z.B. mit dem Gaussschen Eliminationsverfahren gelöst werden.

- Hat zwar eine Lösung, doch numerisch aufwendig (Rechenaufwand proportional zu N^3) und führt oft zu grossen Fehlern bei der Berechnung der a_i.

Beispiel

- Gegeben sei die Aufwärtsgeschwindigkeit einer Rakete als Funktion der Zeit in der Tabelle.
- Finde die Geschwindigkeit v zur Zeit t=16 Sekunden.

t	v(t)
s	m/s
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



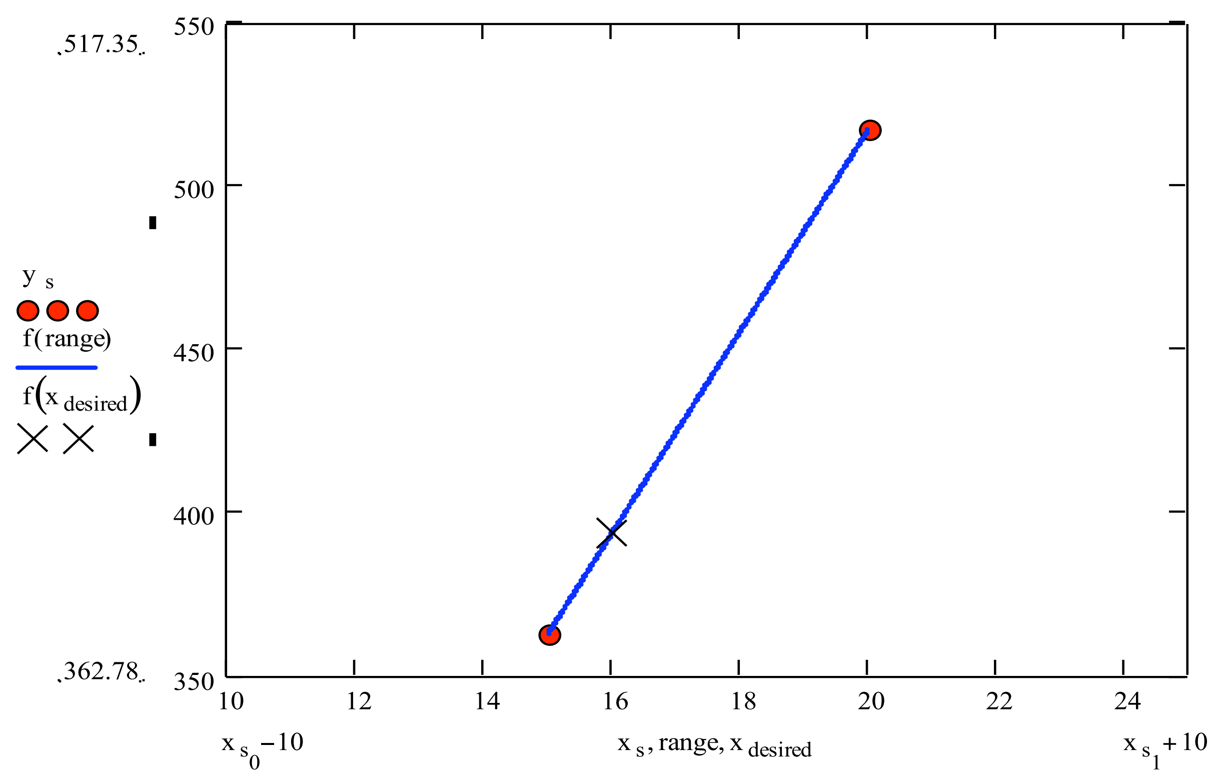
Direkte Methode, linear

- Ansatz: $$v(t) = a_0 + a_1 t$$

- Umgebende Werte (Bracketing values):

$$v(15) = a_0 + a_1(15) = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) = 517.35$$



- Man findet

$$a_0 = -100.91 \qquad a_1 = 30.913$$

- Somit

$$v(t) = -100.91 + 30.913t, \;\; 15 \le t \le 20.$$

$$v(16) = -100.91 + 30.913(16) \;= 393.7 m/s$$

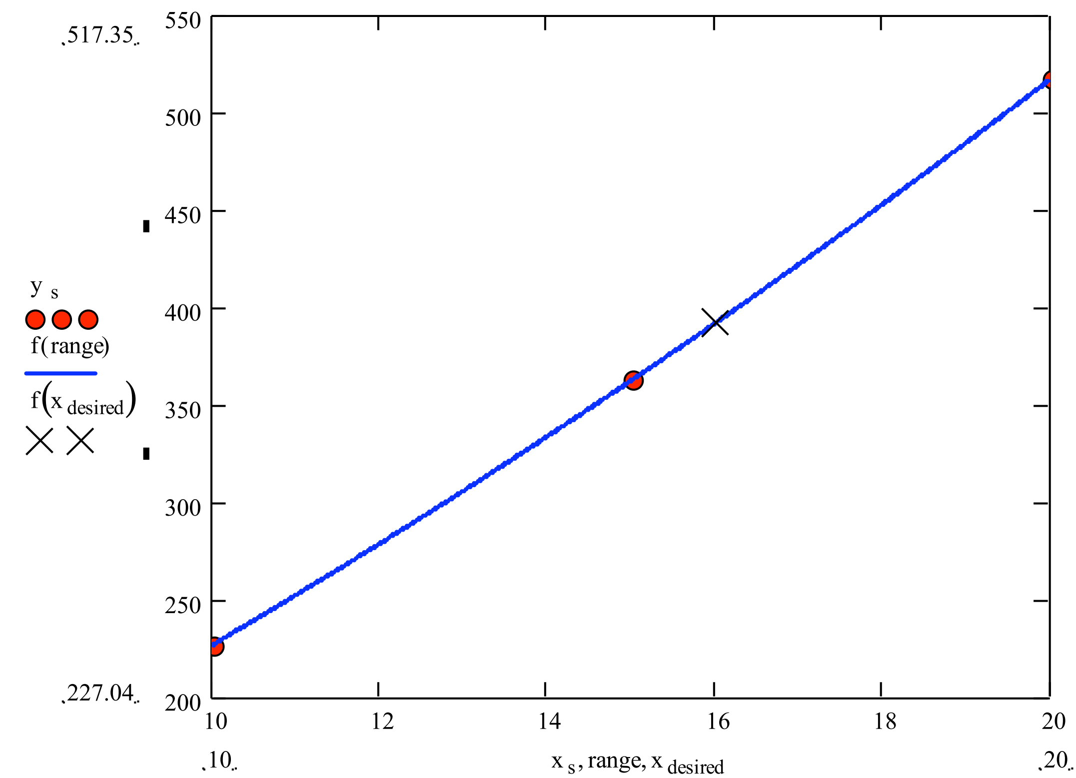
Direkte Methode, quadratisch

- Ansatz: $v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
- Umgebende Werte (*welche?*)

$$v(10) = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 = 227.04$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 = 517.35$$



- Man findet

$$a_0 = 12.001 \quad a_1 = 17.740 \quad a_2 = 0.37637$$

- Somit

$$v(t) = 12.001 + 17.740t + 0.37637t^2, \quad 10 \le t \le 20$$

$$v(16) = 12.001 + 17.740(16) + 0.37637(16)^2$$

$$= 392.19 m/s$$

Direkte Methode, quadratisch II

- Der Unterschied zwischen einer höheren und einer tieferen Ordnung wird oft als Schätzung des Interpolationsfehlers verwendet.

- Hier finden wir:

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{392.19 - 393.70}{392.19}\right| \times 100$$

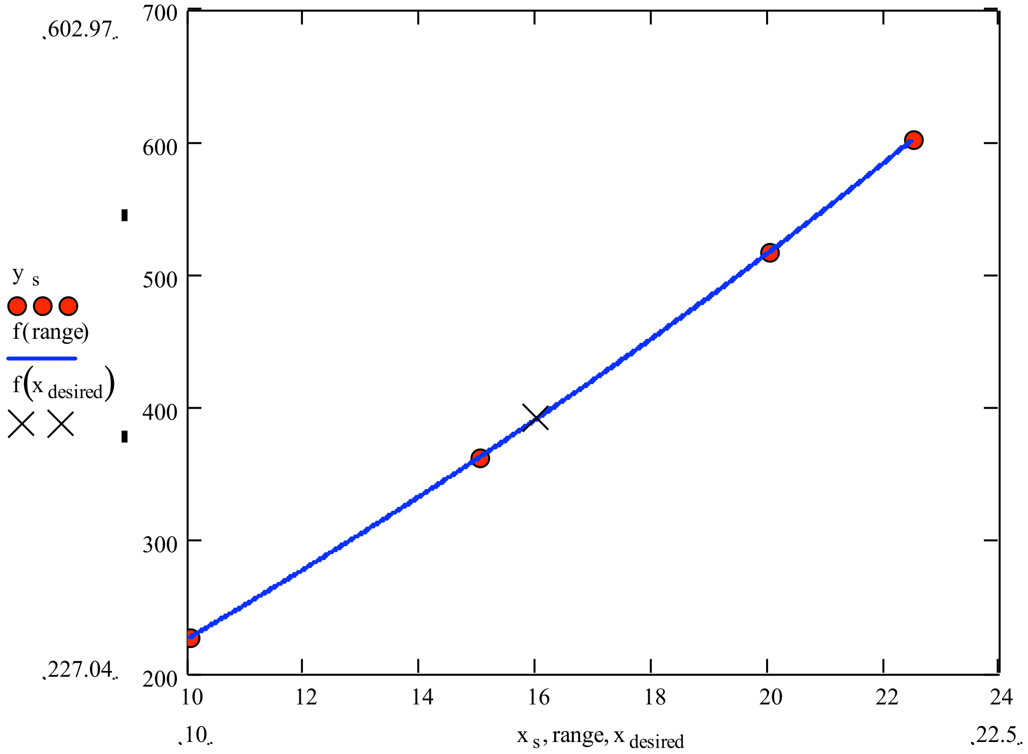
$$= 0.38502\%$$

- Der quadratische Anteil ist somit nur klein.

Direkte Methode, kubisch

- Ansatz: $v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
- Umgebende Werte

$$v(10) = 227.04 = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 + a_3(10)^3$$
$$v(15) = 362.78 = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 + a_3(15)^3$$
$$v(20) = 517.35 = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 + a_3(20)^3$$
$$v(22.5) = 602.97 = a_0 + a_1(22.5) + a_2(22.5)^2 + a_3(22.5)^3$$



- Man findet

$$a_0 = -4.3810 \quad a_1 = 21.289 \quad a_2 = 0.13065 \quad a_3 = 0.0054606$$

- Somit

$$v(t) = -4.3810 + 21.289t + 0.13064t^2 + 0.0054606t^3, \quad 10 \le t \le 22.5$$
$$v(16) = -4.3810 + 21.289(16) + 0.13064(16)^2 + 0.0054606(16)^3$$
$$= 392.06 m/s$$

Direkte Methode, kubisch II

- Hier finden wir als Fehler relativ zur quadratischen Interpolation:

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{392.06 - 392.19}{392.06}\right| \times 100$$

$$= 0.033427\%$$

- Der kubische Anteil ist somit nur sehr klein.

Order of Polynomial	1	2	3
v(t=16) m/s	393.69	392.19	392.06
Absolute Relative Approximate Error	----------	0.38502 %	0.033427 %

- Mit zunehmender Ordnung wird der Beitrag kleiner: Konvergenz

Zurückgelegte Strecke

Wie gross ist die von der Rakete zurückgelegte Strecke zwischen 11 und 16 Sekunden?

- Benütze einfache Integrierbarkeit der Polynome

$$v(t) = -4.3810 + 21.289t + 0.13064t^2 + 0.0054606t^3, \quad 10 \le t \le 22.5$$

$$s(16) - s(11) = \int_{11}^{16} v(t)\,dt$$

$$\approx \int_{11}^{16} \left(-4.3810 + 21.289t + 0.13065t^2 + 0.0054606t^3\right) dt$$

$$= \left[-4.3810t + 21.289\frac{t^2}{2} + 0.13065\frac{t^3}{3} + 0.0054606\frac{t^4}{4}\right]_{11}^{16}$$

$$= 1605\ m$$

Beschleunigung

Wie gross ist die Beschleunigung der Rakete zum Zeitpunkt t = 16 Sekunden?

- Benütze einfache Differenzierbarkeit der Polynome

$$v(t) = -4.3810 + 21.289t + 0.13064t^2 + 0.0054606t^3, \quad 10 \le t \le 22.5$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left(-4.3810 + 21.289t + 0.13064t^2 + 0.0054606t^3\right)$$

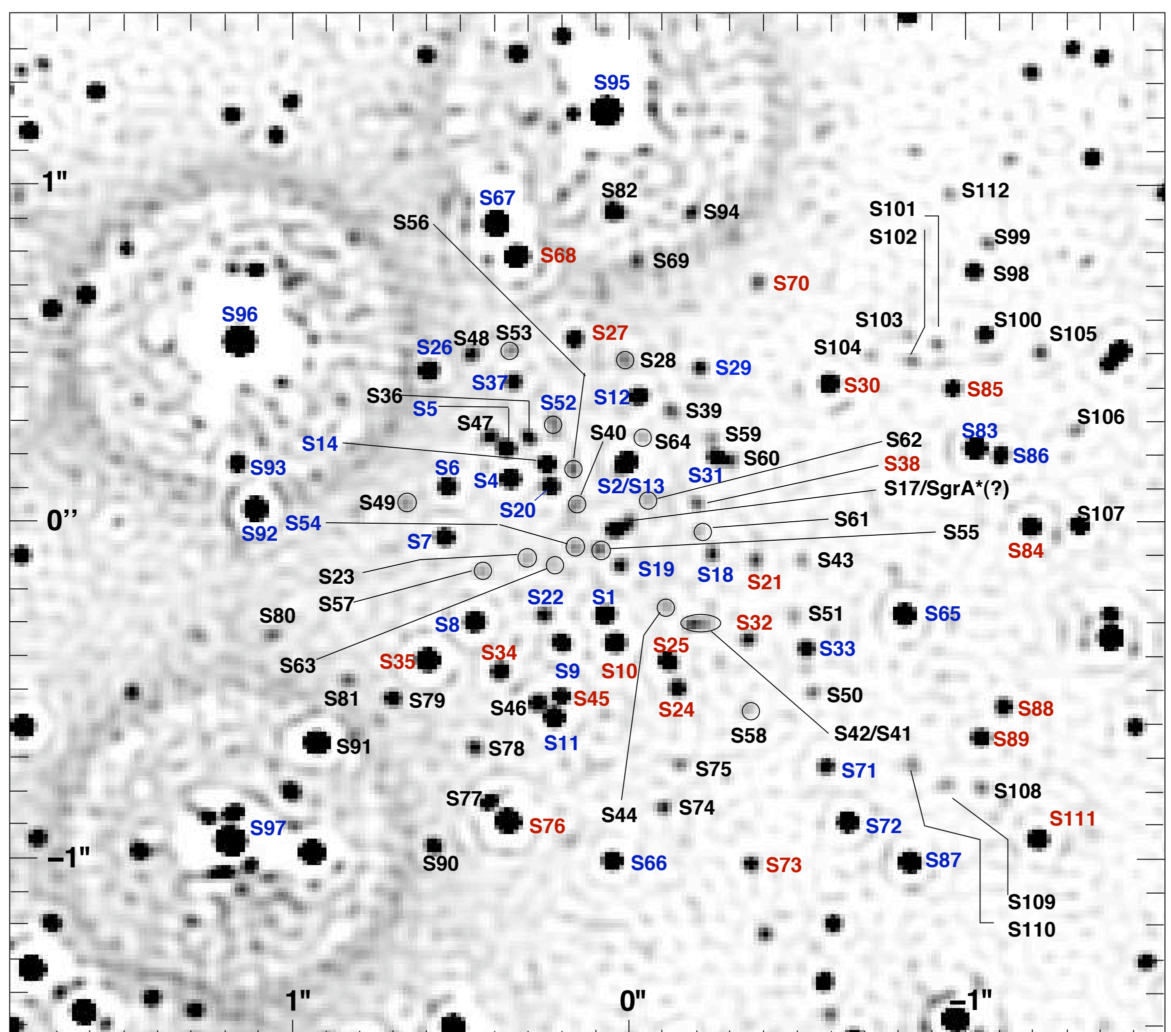
$$= 21.289 + 0.26130t + 0.016382t^2, \quad 10 \le t \le 22.5$$

$$a(16) = 21.289 + 0.26130(16) + 0.016382(16)^2$$

$$= 29.664 m/s^2$$

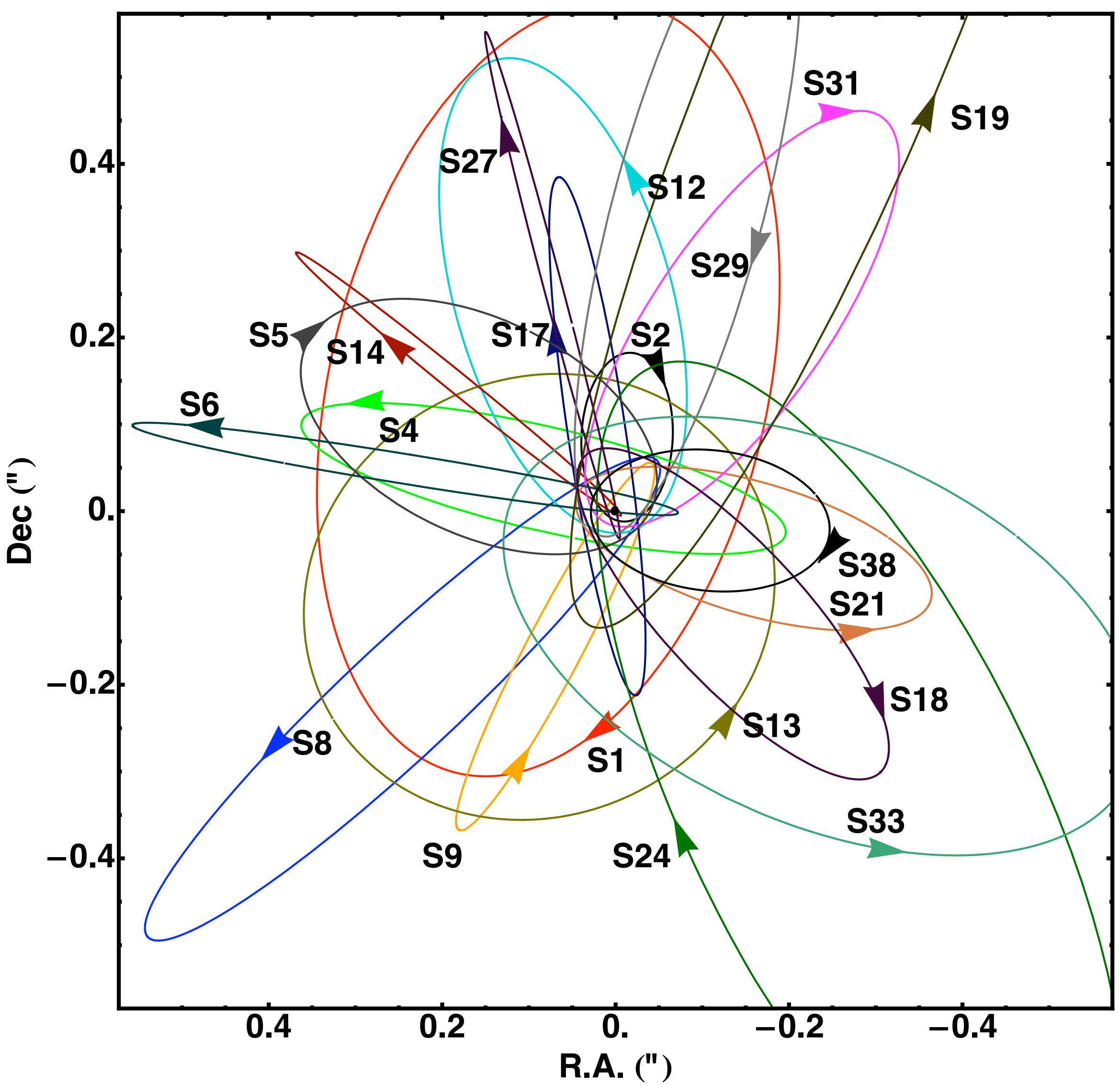
Anwendung

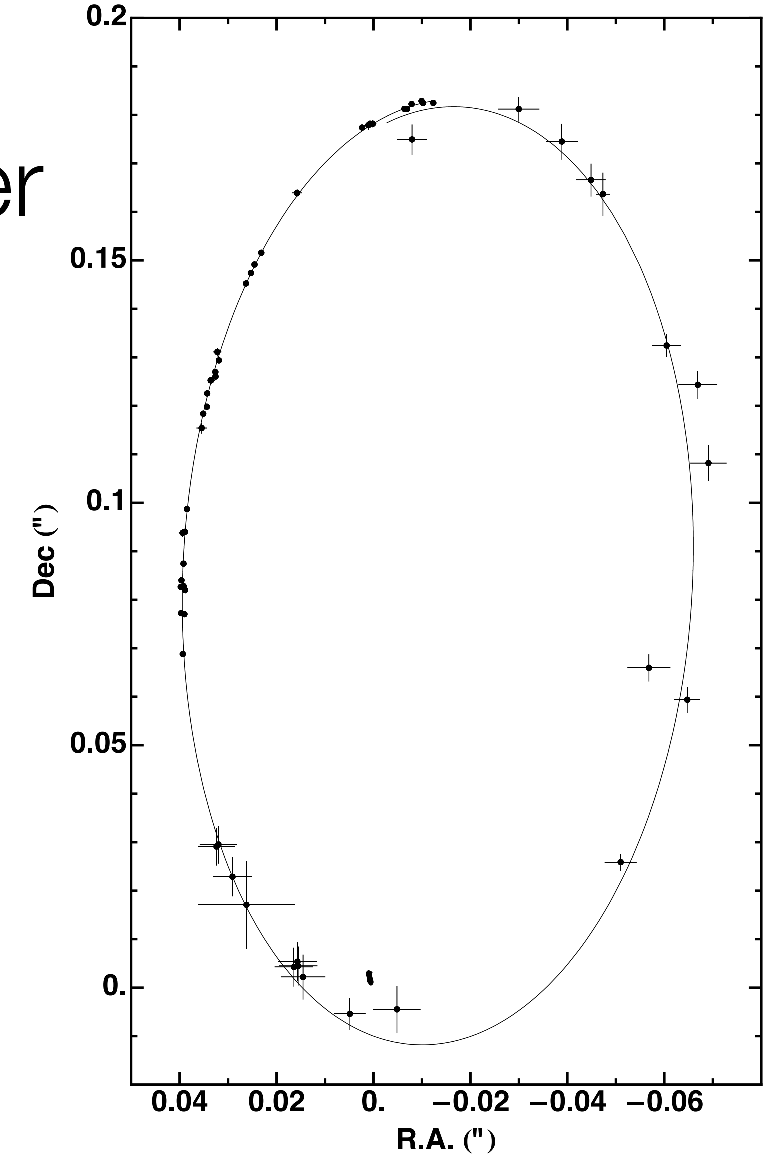
- Im Zentrum unserer Galaxis befindet sich ein Massives Schwarzes Loch (MBH). Das Schwarze Loch ist selber nicht (kaum) sichtbar (Sgr A*).
- Die Sterne in der Umgebung umkreisen das MBH.

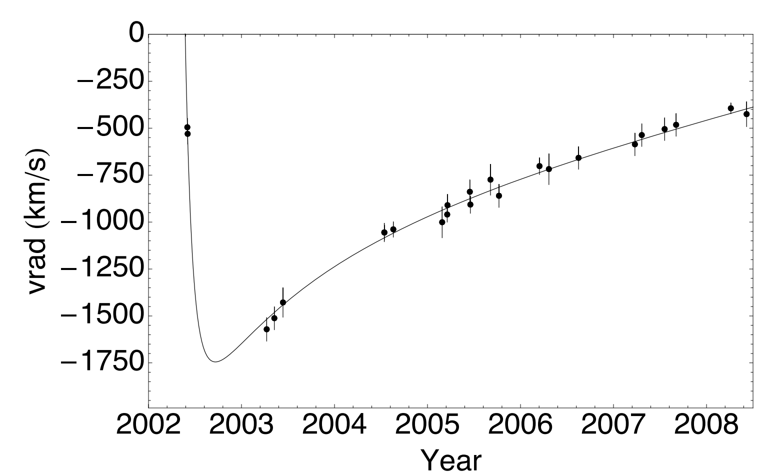


Anwendung II

- Aus der Bewegung der Sterne, und dem Gravitationsgesetz (Newton, oder allgemein relativistisch) lässt sich die Masse des MBH herleiten.







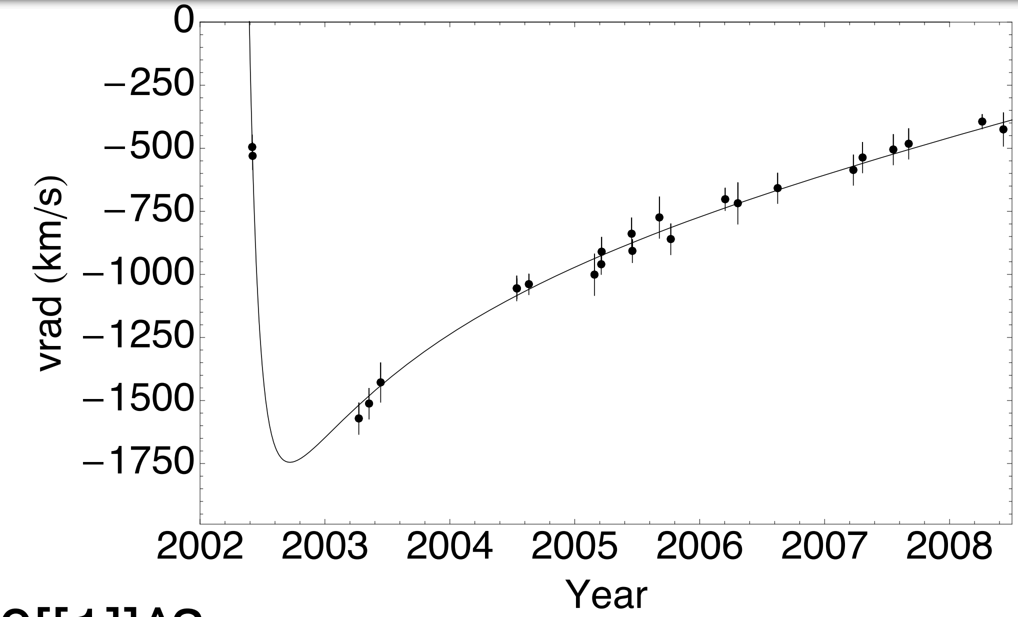
Anwendung III

- Bewegung von S2

(1,1500), (2,1000), (3,800), (4,700)

x0 = {1, 2, 3, 4}

c = {1500, 1000, 800, 700}




```
Solve[{c[[1]] == a0 + a1*x0[[1]] + a2*x0[[1]]^2 + a3*x0[[1]]^3,
  c[[2]] == a0 + a1*x0[[2]] + a2*x0[[2]]^2 + a3*x0[[2]]^3,
  c[[3]] == a0 + a1*x0[[3]] + a2*x0[[3]]^2 + a3*x0[[3]]^3,
  c[[4]] == a0 + a1*x0[[4]] + a2*x0[[4]]^2 + a3*x0[[4]]^3}, {a0, a1, a2, a3}]
```

```
{{a0 -> 2500, a1 -> -(3950/3), a2 -> 350, a3 -> -(100/3)}}
```

$$\begin{aligned} M &= (3.95 \pm 0.06|_{\mathrm{stat}} \pm 0.18|_{\mathrm{R_0,\,stat}} \pm 0.31|_{\mathrm{R_0,\,sys}}) \\ &\quad \times 10^6\, M_\odot \times (R_0/8\,\mathrm{kpc})^{2.19} \\ &= (4.31 \pm 0.36) \times 10^6\, M_\odot \text{ for } R_0 = 8.33\,\mathrm{kpc} \end{aligned}$$

3 Dividierte Differenzmethode

Ansatz

Die Polynome werden nun in der Newton-Basis dargestellt:

$$N_0(x) = 1 \qquad N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) = (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

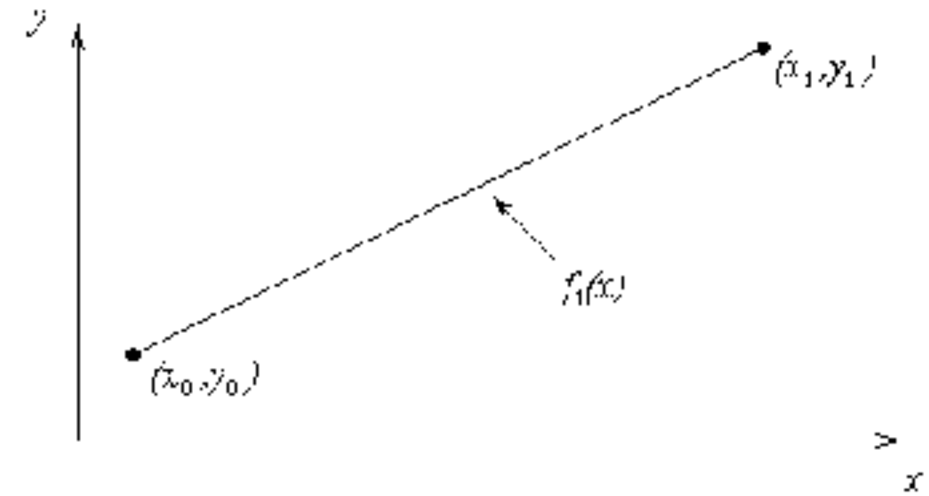
Damit können die Koeffizienten b_i effizient mit der Methode der dividierten Differenzen bestimmt werden.

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots. + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Differenzmethode, linear

- Ansatz:

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$



- Koeffizienten

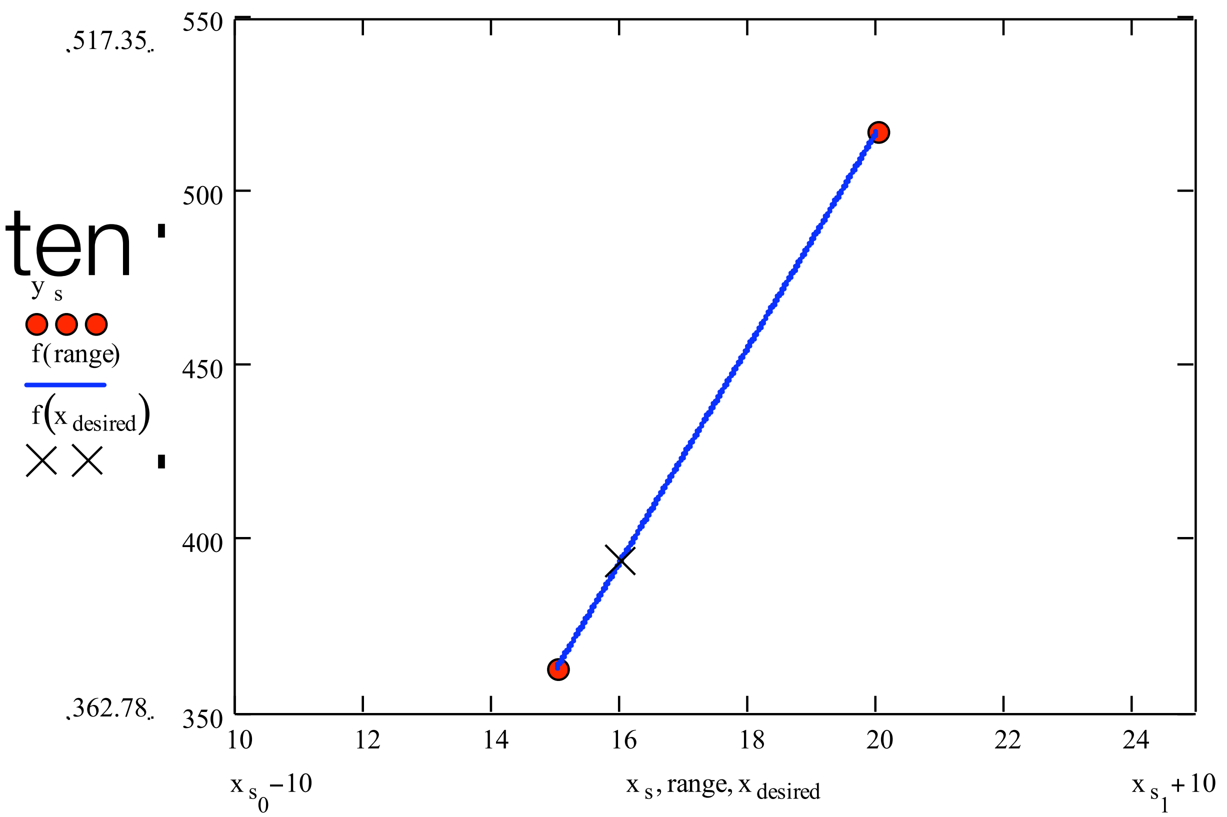
$$(x_0, y_0), (x_1, y_1),$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Im Beispiel

- Ansatz: $v(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$
- Bracketing Values und Koeffizienten



$$t_0 = 15,\ v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20,\ v(t_1) = 517.35$$

$$b_0 = v(t_0) = 362.78$$

$$b_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = 30.914$$

- Somit

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$$

$$= 362.78 + 30.914(t - 15),\ 15 \le t \le 20$$

At $t = 16$

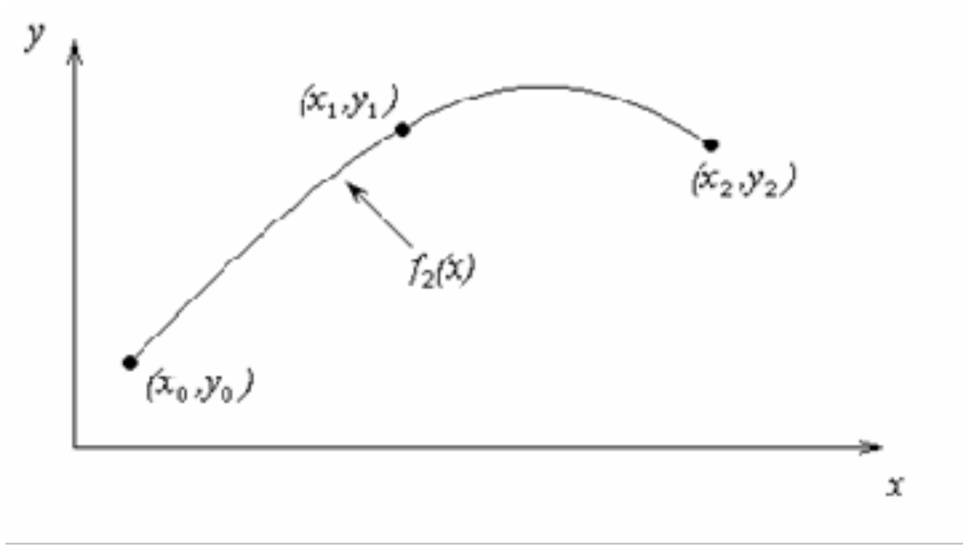
$$v(16) = 362.78 + 30.914(16 - 15)$$

$$= 393.69 \text{ m/s}$$

Differenzmethode, quadratisch

- Ansatz:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$



- Koeffizienten

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Die Koef. können durch die Grundbedingung $\forall\ x_i$ $f(x_i)=y_i$ berechnet werden.

Im Beispiel

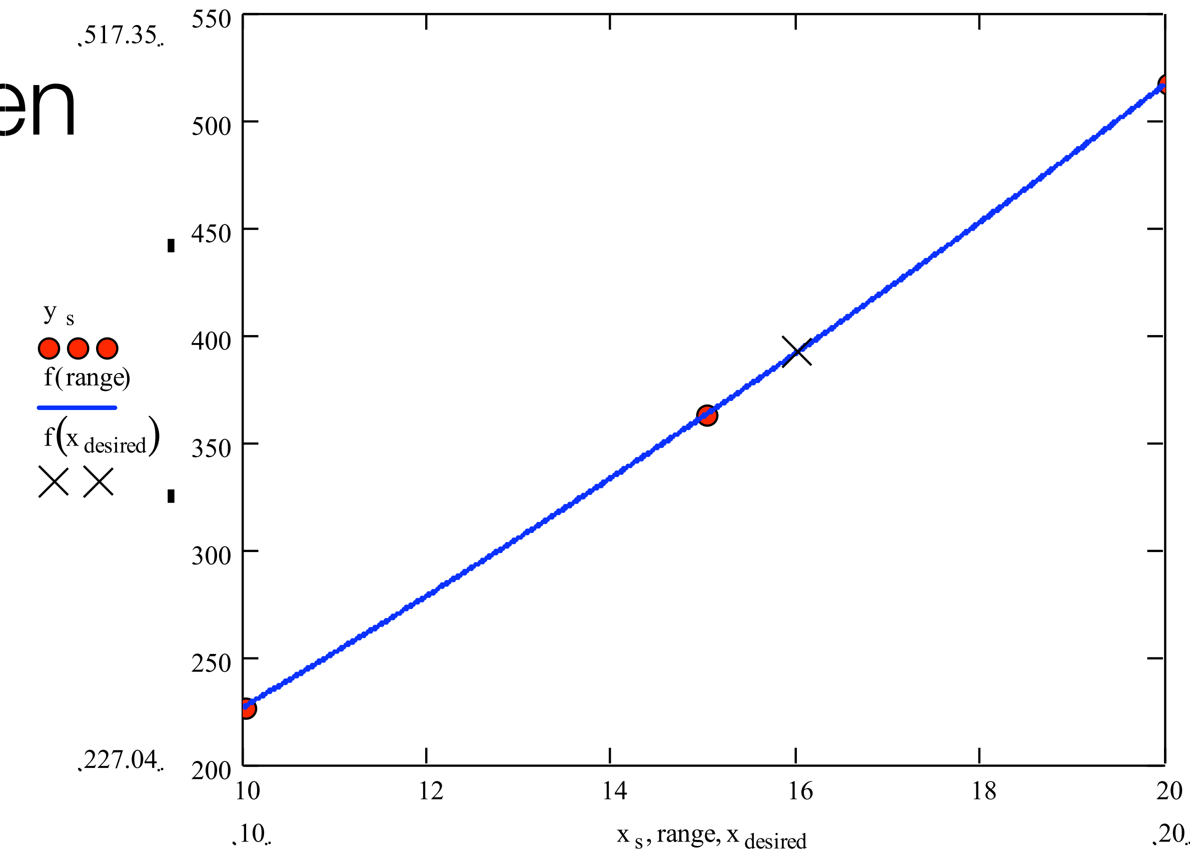
- Ansatz: $f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

- Bracketing Values und Koeffizienten

$$t_0 = 10,\ v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15,\ v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20,\ v(t_2) = 517.35$$



$$b_0 = v(t_0)$$

$$= 227.04$$

$$b_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10}$$

$$= 27.148$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} - \dfrac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}}{t_2 - t_0} = \frac{\dfrac{517.35 - 362.78}{20 - 15} - \dfrac{362.78 - 227.04}{15 - 10}}{20 - 10}$$

$$= \frac{30.914 - 27.148}{10}$$

$$= 0.37660$$

Im Beispiel II

- Somit

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1)$$

$$= 227.04 + 27.148(t - 10) + 0.37660(t - 10)(t - 15), \qquad 10 \le t \le 20$$

At $t = 16$,

$$v(16) = 227.04 + 27.148(16 - 10) + 0.37660(16 - 10)(16 - 15) \;= 392.19 \text{ m/s}$$

- Wiederum Fehlerabschätzung (Vergleich zu linear)

$$|\in_a| = \left|\frac{392.19 - 393.69}{392.19}\right| \text{x}100$$

$$= 0.38502\ \%$$

(wie zuvor)

Differenzmethode, quadratisch II

- Ansatz: $f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

- Definiere neue Notation:

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

- Dann gilt

$$f_2(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

Differenzmethode, generell

- N+1 Datenpunkte: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$
- Generelle Form

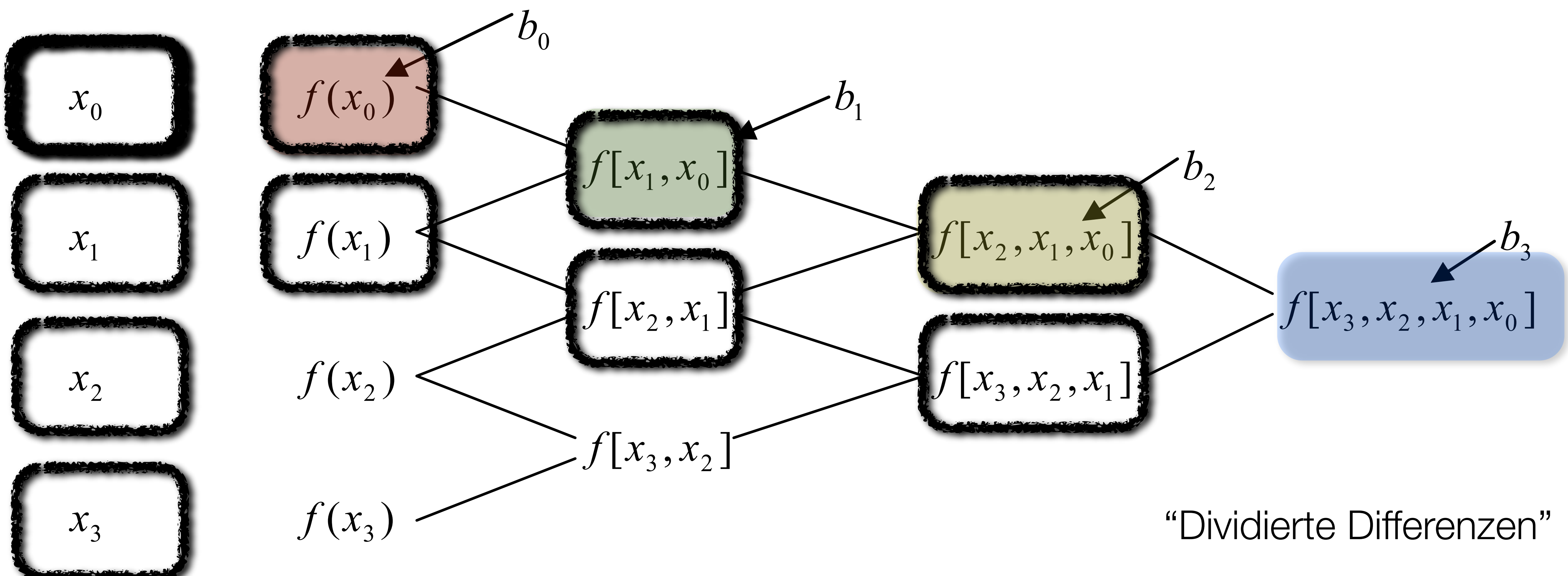
$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots. + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

- wobei

$$\begin{aligned}
b_0 &= f[x_0] \\
b_1 &= f[x_1, x_0] \\
b_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\
&\vdots \\
b_{n-1} &= f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots., x_0] \\
b_n &= f[x_n, x_{n-1}, \ldots., x_0]
\end{aligned}$$

Rekursionsformel von Aitken

- Kubisch $f_3(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$
$+ f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$



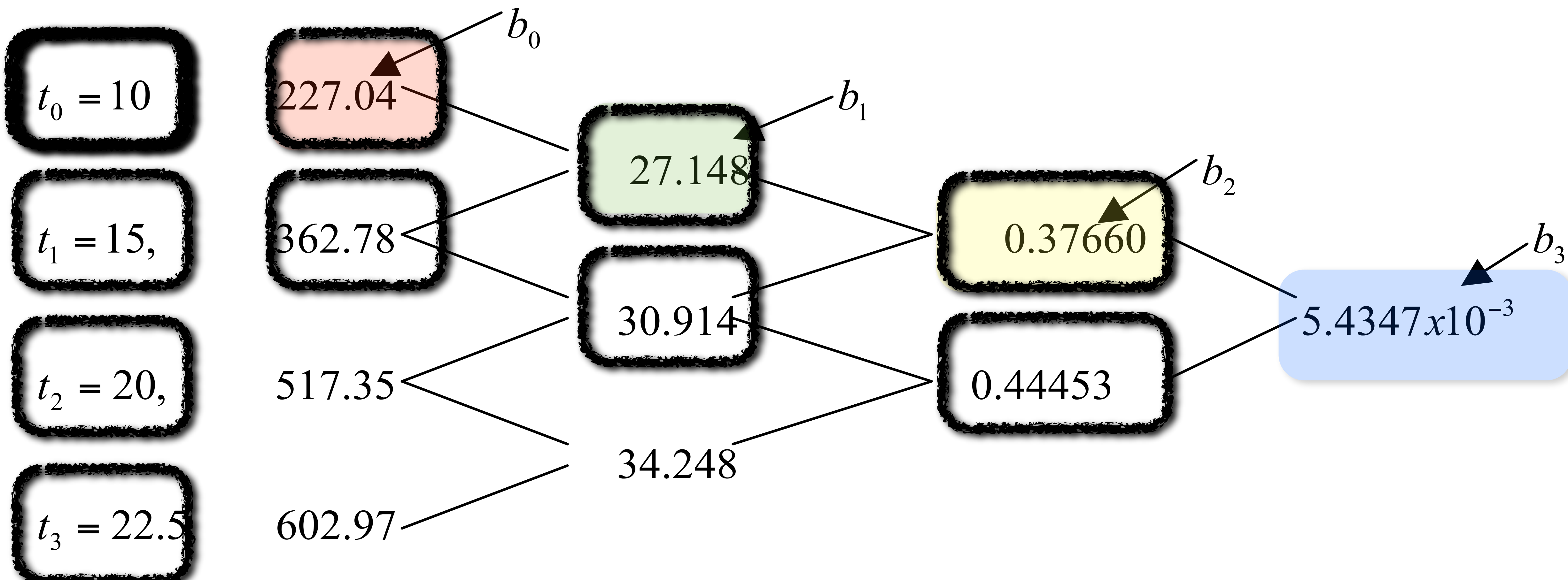
"Dividierte Differenzen"

- Die gesuchten Koeffizienten sind die obere Schrägzeile.
- Numerisch wird eine Spalte nach der anderen berechnet.
- Wenn ein weiterer Punkt hinzugefügt werden soll (höhere Ordnung), muss nur eine weitere Zeile zusätzlich berechnet werden.

Im Beispiel

- Ansatz (kubisch): $v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) + b_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$
- Bracketing values

$$t_0 = 10, \quad v(t_0) = 227.04$$
$$t_1 = 15, \quad v(t_1) = 362.78$$
$$t_2 = 20, \quad v(t_2) = 517.35$$
$$t_3 = 22.5, \quad v(t_3) = 602.97$$



$b_0 = 227.04$; $b_1 = 27.148$; $b_2 = 0.37660$; $b_3 = 5.4347*10^{-3}$

Im Beispiel II

- Somit finden wir

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) + b_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$$
$$= 227.04 + 27.148(t - 10) + 0.37660(t - 10)(t - 15)$$
$$+ 5.4347 * 10^{-3}(t - 10)(t - 15)(t - 20)$$

- Bei t=16s

$$v(16) = 227.04 + 27.148(16 - 10) + 0.37660(16 - 10)(16 - 15)$$
$$+ 5.4347 * 10^{-3}(16 - 10)(16 - 15)(16 - 20)$$
$$= 392.06 \text{ m/s}$$

(wie zuvor)

- Fehlerabschätzung

Order of Polynomial	1	2	3
v(t=16) m/s	393.69	392.19	392.06
Absolute Relative Approximate Error	----------	0.38502 %	0.033427 %

3 Splines

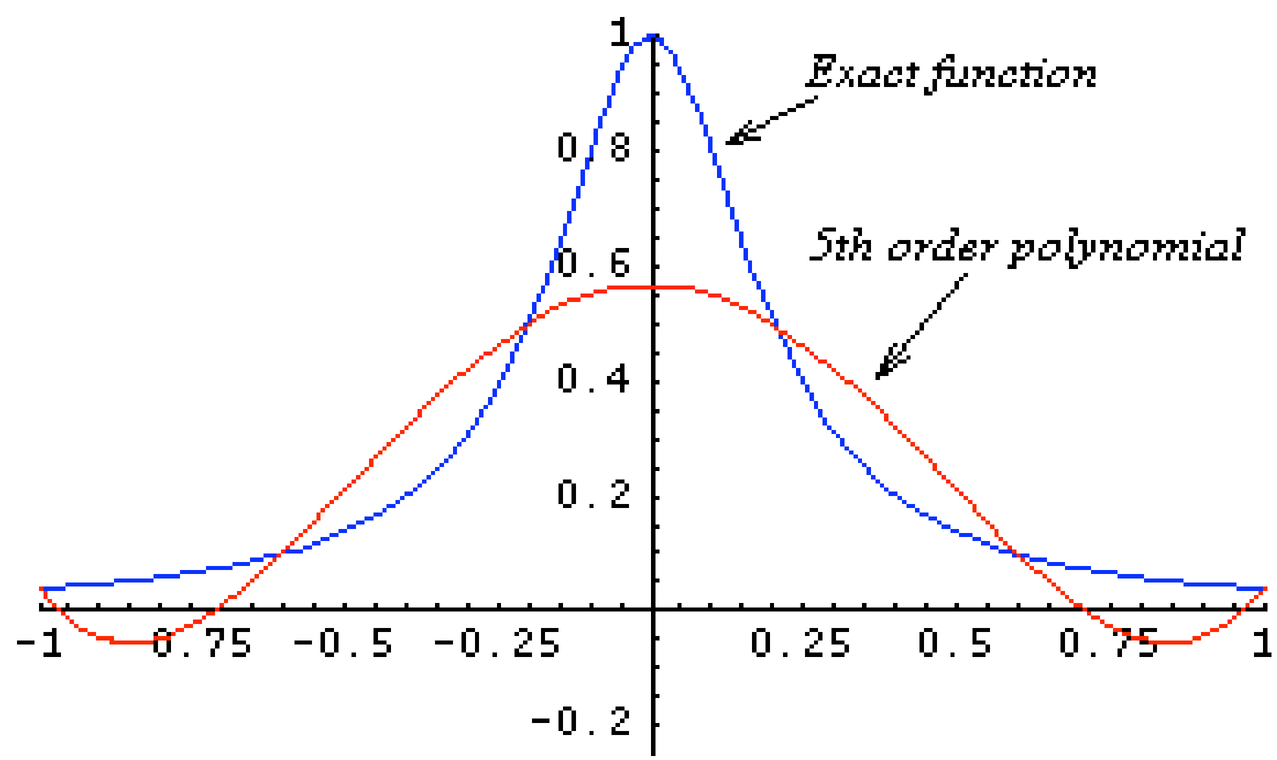
Wieso Splines?

- Betrachte die (einfache) Funktion

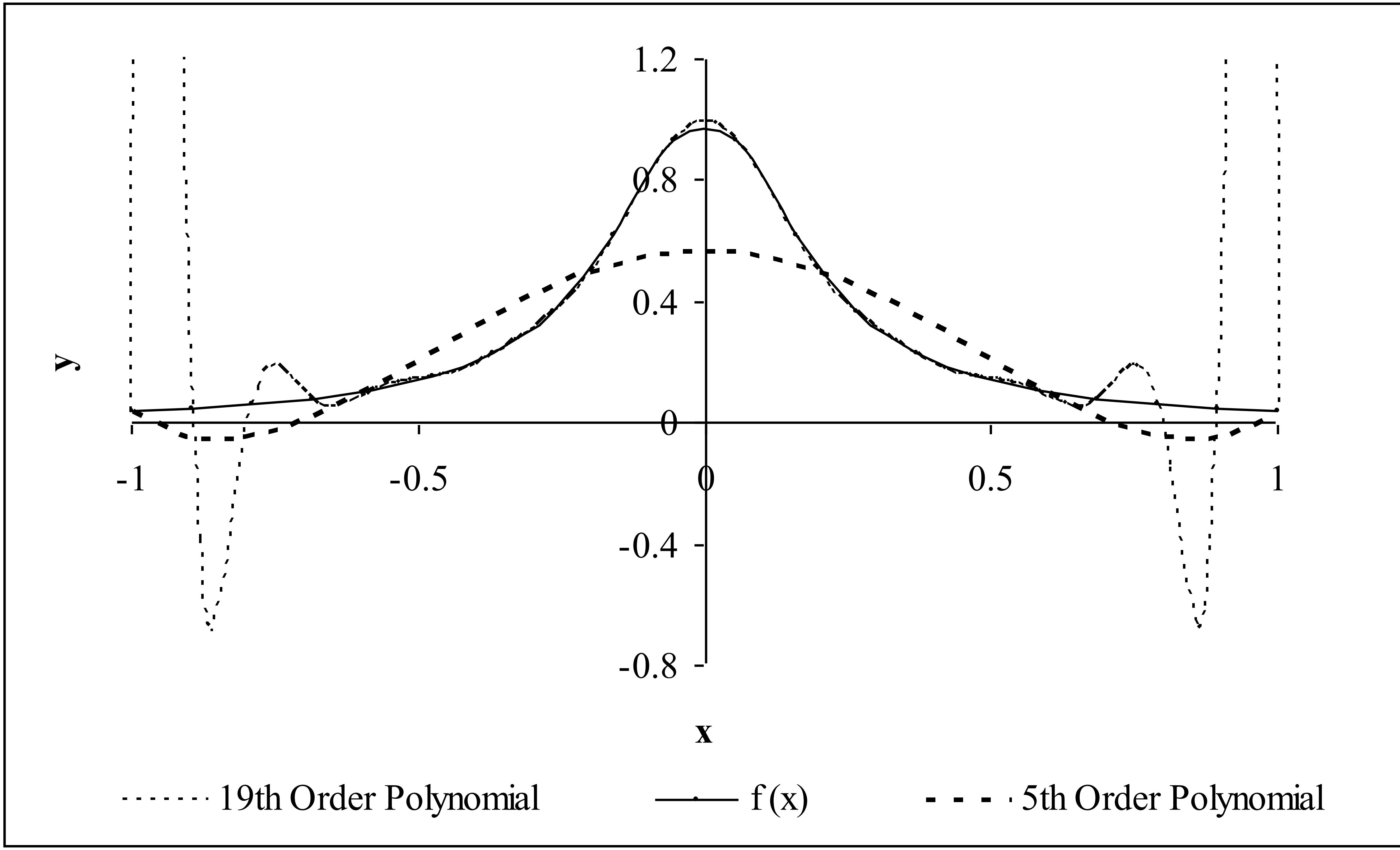
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \qquad \text{(Runges Funktion)}$$

- Sechs equidistante Stützstellen im Interval [-1,1]
- Interpolation mit Polynom 5ter Ordnung.

x	$y = \frac{1}{1+25x^2}$
-1.0	0.038461
-0.6	0.1
-0.2	0.5
0.2	0.5
0.6	0.1
1.0	0.038461



Höhere Ordnung hilft nicht....



Demo mit Mathematica

Idee Splines

- Benutze nur wenige, lokale Punkte x_i um x
  - Verhinderst Oszillationen

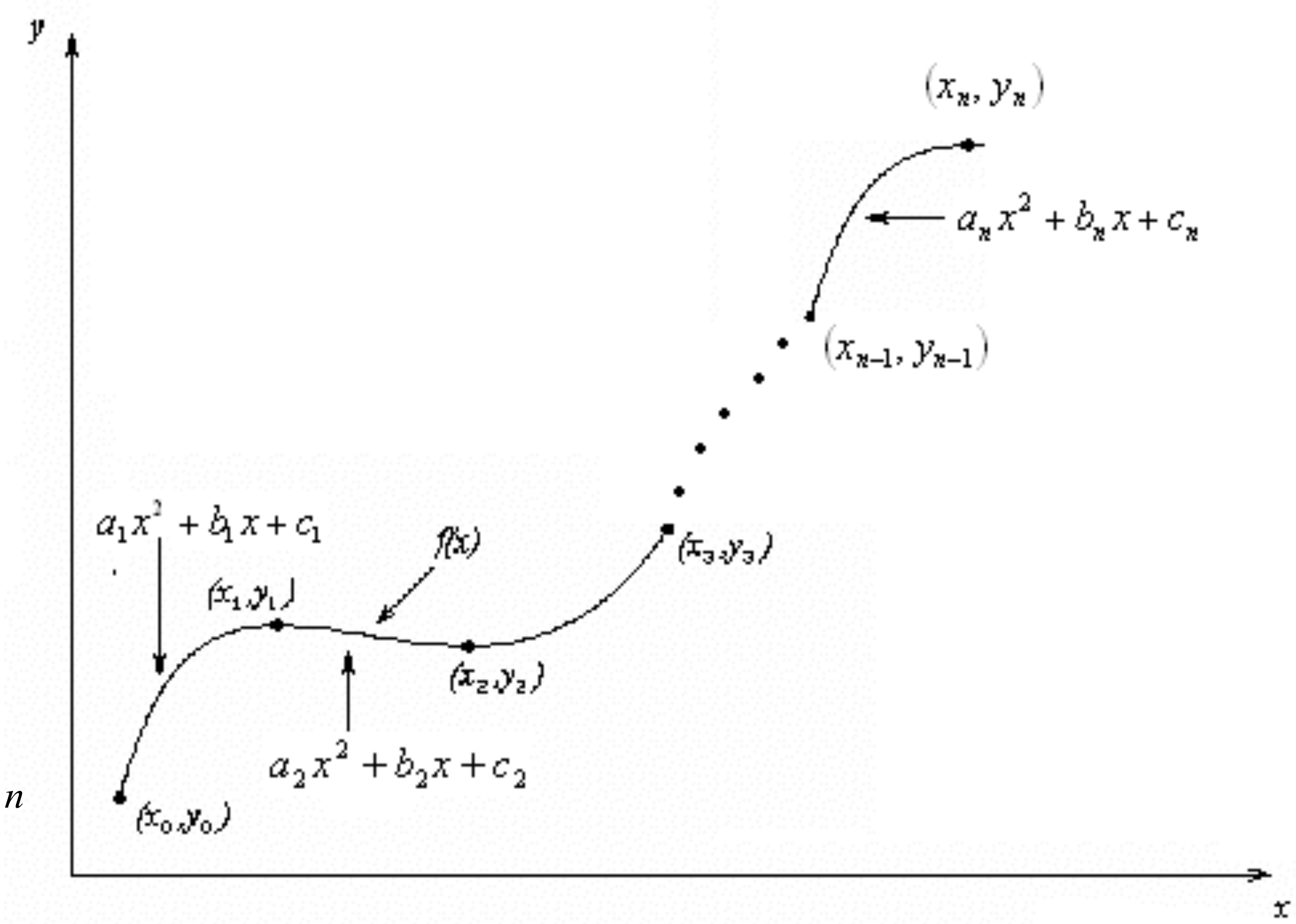
- Aber verwende auch noch Information von ausserhalb des betrachteten Intervalls
  - Insbesondere: verlange stetige Ableitungen

- Trivialer Fall: Sequenz von linearen Interpolationen (Polygonzug)

Quadratische Splines

- Sequenz von quadratischer Interpolationen mit Nebenbedingungen der Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_1 x^2 + b_1 x + c_1, & x_0 \le x \le x_1 \\
&= a_2 x^2 + b_2 x + c_2, & x_1 \le x \le x_2 \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&= a_n x^2 + b_n x + c_n, & x_{n-1} \le x \le x_n
\end{aligned}
$$



- Gesucht $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \ldots, n$

Bedingung 1

- Normale Grundanforderung an die Interpolierende.
  - Jede Spline geht durch zwei aufeinanderfolgende Punkte

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = f(x_1) \quad .$$

$$\vdots$$

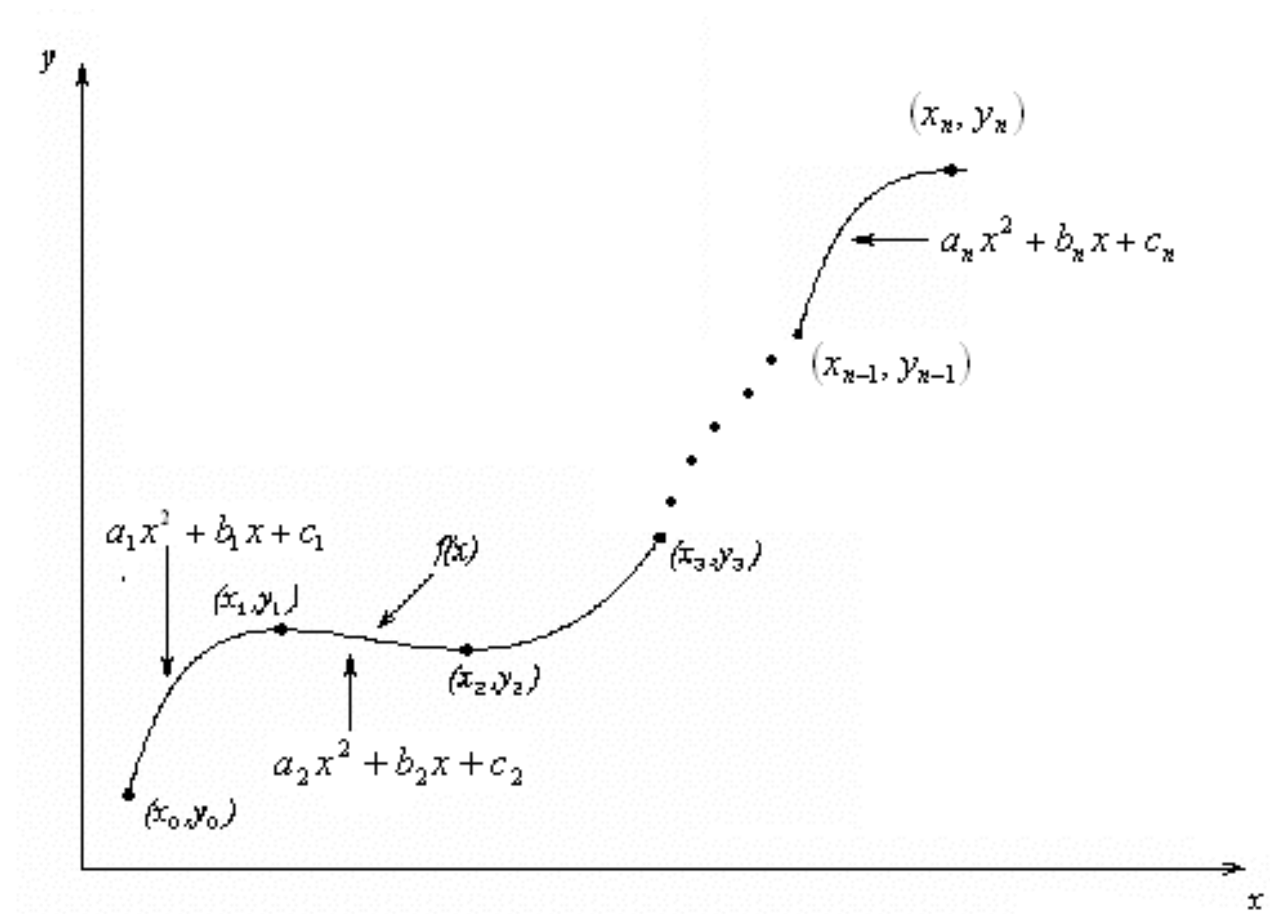
$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = f(x_i) \quad .$$

$$\vdots$$

$$a_n x_{n-1}^2 + b_n x_{n-1} + c_n = f(x_{n-1})$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$



- Ergibt 2N Gleichungen

Bedingung 2

- Die erste Ableitung sei stetig auf dem ganzen Intervall.
- Beispiel

1. Ableitung der 1. Spline

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad \text{is} \qquad 2a_1x + b_1$$

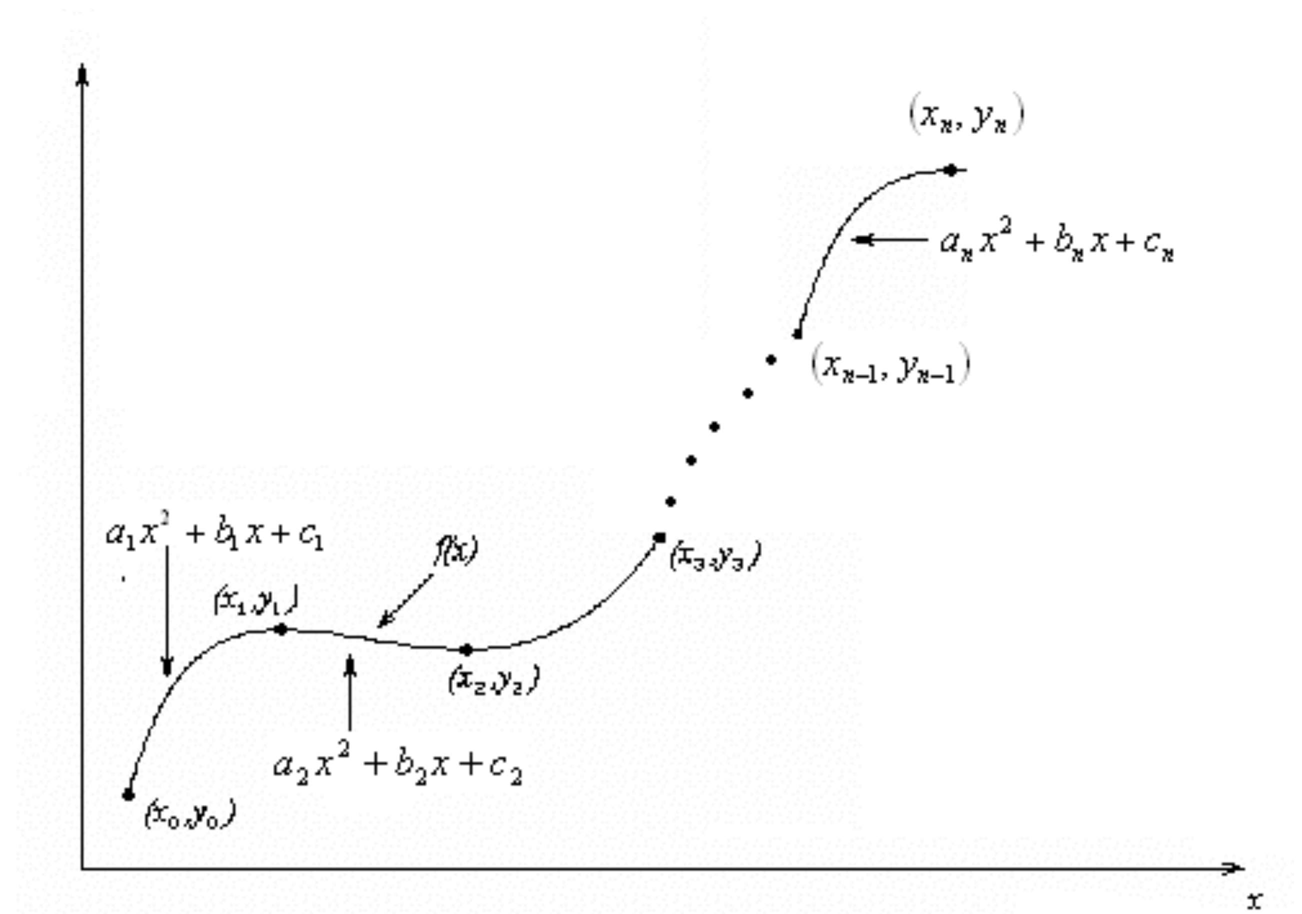
1. Ableitung der 2. Spline

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 \quad \text{is} \qquad 2a_2x + b_2$$

Forderung dass identisch bei x_1

$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2$$

$$2a_1x_1 + b_1 - 2a_2x_1 - b_2 = 0$$



Bedingung 2 II

- Identische Bedingungen an alle anderen Splines

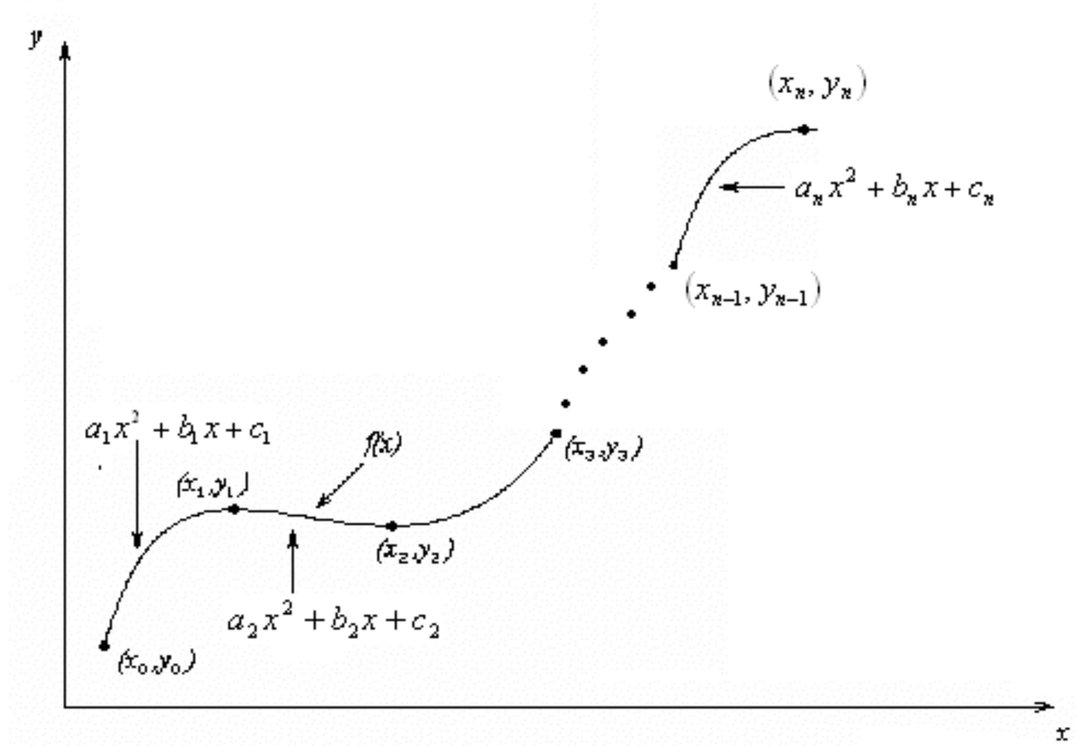
$$2a_2x_2 + b_2 - 2a_3x_2 - b_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$2a_ix_i + b_i - 2a_{i+1}x_i - b_{i+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_nx_{n-1} - b_n = 0$$

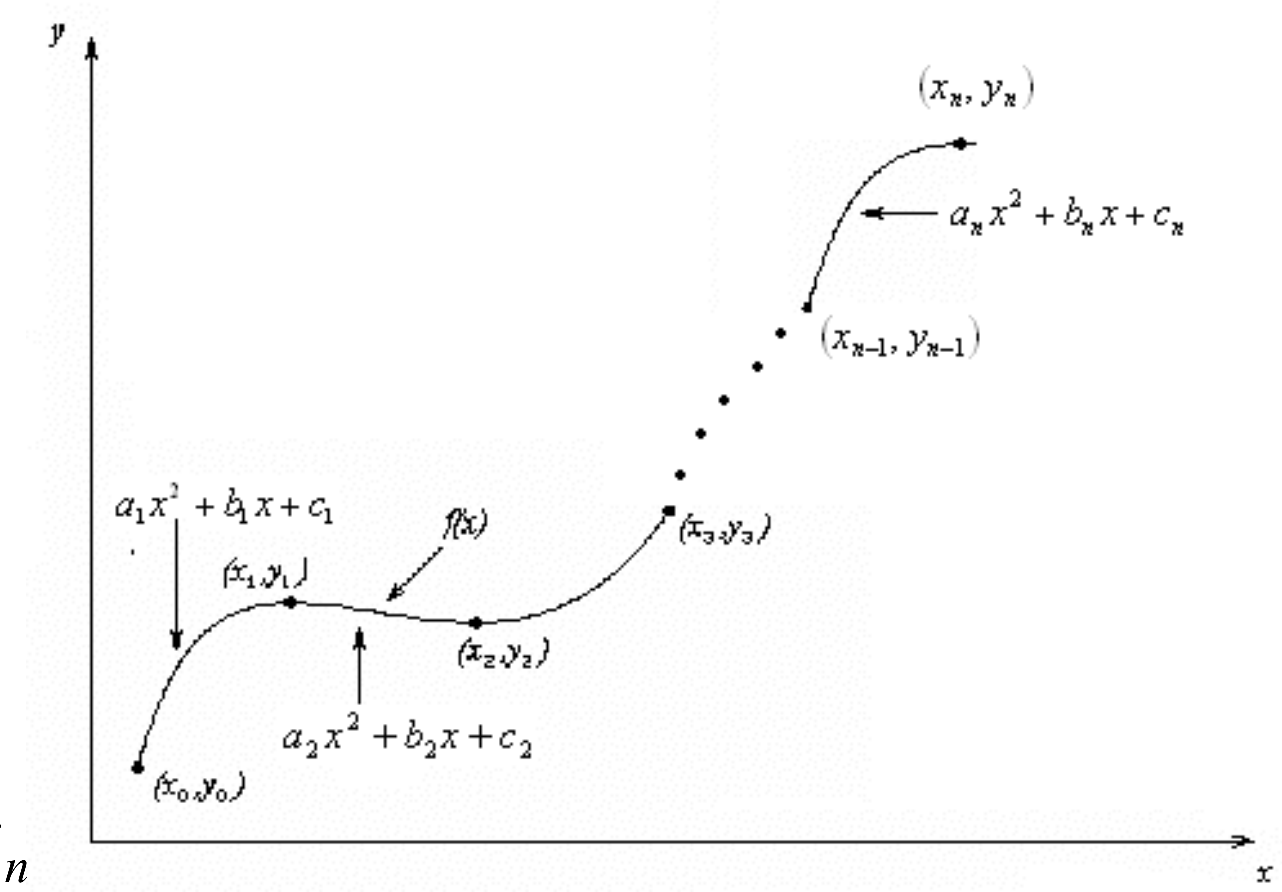


- Ergibt N-1 Gleichungen. Somit 2 N + N -1 = 3 N -1
- Letzte Bedingung: Nimm an dass die erste Spline linear ist: $a_1=0$
- Sequenz von quadratischer Interpolationen mit Nebenbedinungen der Punkte

Aufstellung

- Dies ergibt 3 N Gleichungen für 3 N Unbekannte.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_1x^2 + b_1x + c_1, & x_0 \le x \le x_1 \\
&= a_2x^2 + b_2x + c_2, & x_1 \le x \le x_2 \\
&\;. \\
&\;. \\
&\;. \\
&= a_nx^2 + b_nx + c_n, & x_{n-1} \le x \le x_n
\end{aligned}
$$



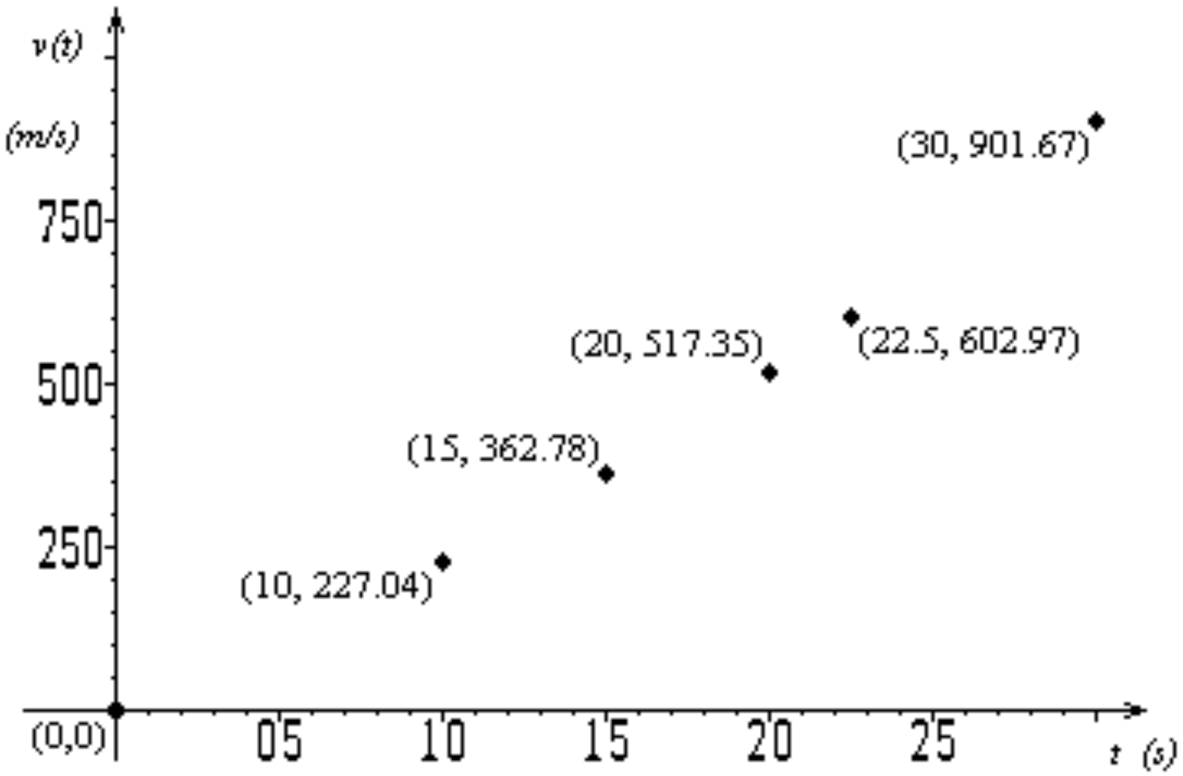
- Bestimme die a_i, b_i und c_i
- Spline Interpolation auf dem ganzen Intervall möglich
- Sequenz von quadratischer Interpolationen

mit Nebenbedinungen der Punkte

Im Beispiel

- Wir haben sechs Datenpunkte, dies ergibt fünf Splines

$$
\begin{aligned}
v(t) &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad 0 \le t \le 10 \\
&= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \quad 10 \le t \le 15 \\
&= a_3 t^2 + b_3 t + c_3, \quad 15 \le t \le 20 \\
&= a_4 t^2 + b_4 t + c_4, \quad 20 \le t \le 22.5 \\
&= a_5 t^2 + b_5 t + c_5, \quad 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$

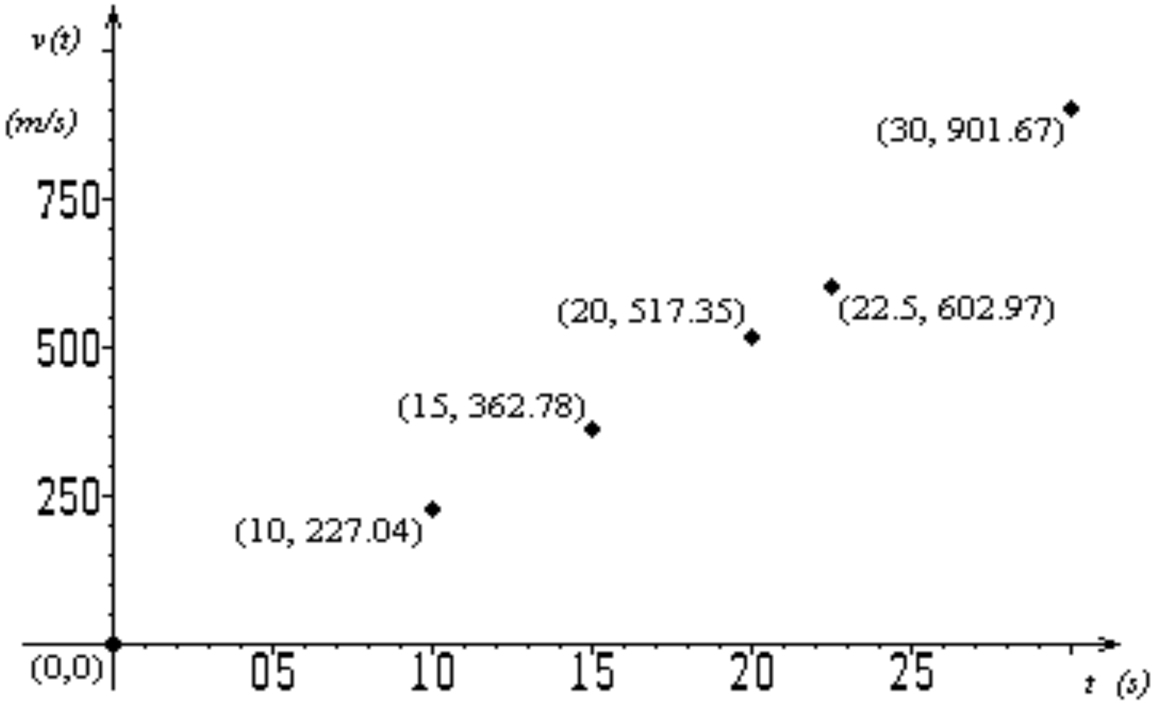


Im Beispiel II

- Erstelle das Gleichungssystem: Bedingung 1
  - Spline 1 geht durch x_0 und x_1

$$a_1(0)^2 + b_1(0) + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_1(10)^2 + b_1(10) + c_1 = 227.04 \qquad (2)$$



  - Analog

$$a_2(10)^2 + b_2(10) + c_2 = 227.04 \qquad (3)$$

$$a_2(15)^2 + b_2(15) + c_2 = 362.78 \qquad (4)$$

$$a_3(15)^2 + b_3(15) + c_3 = 362.78 \qquad (5)$$

$$a_3(20)^2 + b_3(20) + c_3 = 517.35 \qquad (6)$$

$$a_4(20)^2 + b_4(20) + c_4 = 517.35 \qquad (7)$$

$$a_4(22.5)^2 + b_4(22.5) + c_4 = 602.97 \qquad (8)$$

$$a_5(22.5)^2 + b_5(22.5) + c_5 = 602.97 \qquad (9)$$

$$a_5(30)^2 + b_5(30) + c_5 = 901.67 \qquad (10)$$

Im Beispiel III

- Erstelle das Gleichungssystem: Bedingung 2 (Ableitungen)

At t = 10

$$2a_1(10) + b_1 - 2a_2(10) - b_2 = 0 \qquad (11)$$

At t = 15

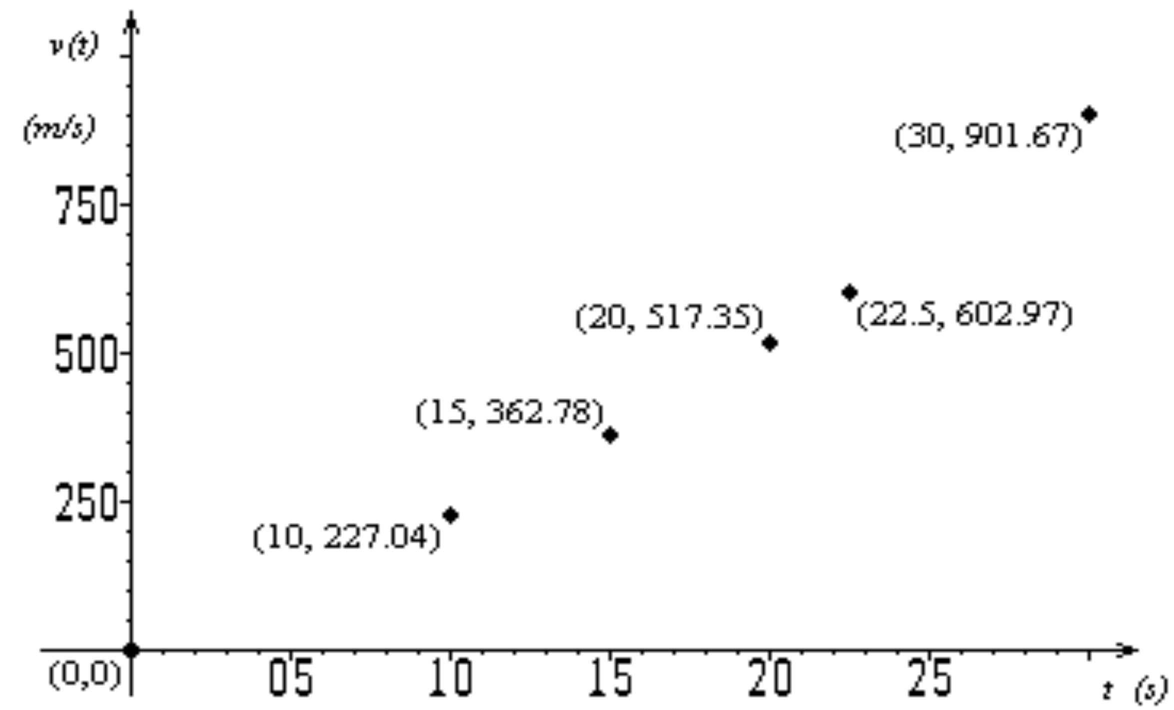
$$2a_2(15) + b_2 - 2a_3(15) - b_3 = 0 \qquad (12)$$

At t = 20

$$2a_3(20) + b_3 - 2a_4(20) - b_4 = 0 \qquad (13)$$

At t = 22.5

$$2a_4(22.5) + b_4 - 2a_5(22.5) - b_5 = 0 \qquad (14)$$



- Zusatzannahme $a_1 t^2 + b_1 t + c_1$ is linear,

$$a_1 = 0 \qquad (15)$$

Im Beispiel IV

- Vollständiges Gleichungssystem (Matrixschreibweise)

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
100 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 100 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 225 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.25 & 22.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.25 & 22.5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 30 & 1 \\
20 & 1 & 0 & -20 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 30 & 1 & 0 & -30 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 1 & 0 & -40 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 1 & 0 & -45 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ a_5 \\ b_5 \\ c_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 227.04 \\ 227.04 \\ 362.78 \\ 362.78 \\ 517.35 \\ 517.35 \\ 602.97 \\ 602.97 \\ 901.67 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

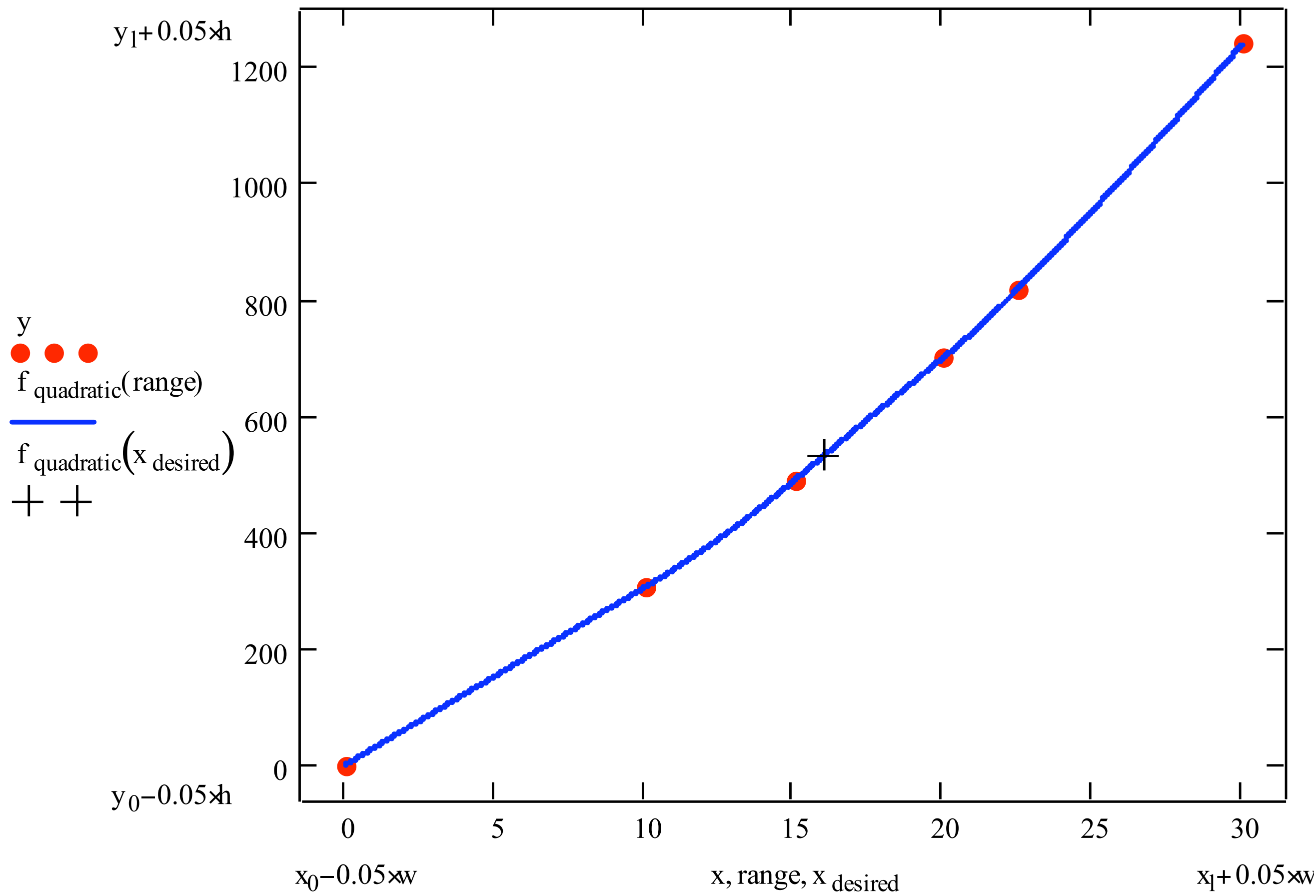
- Lösen führt auf:

i	a_i	b_i	c_i
1	0	22.704	0
2	0.8888	4.928	88.88
3	-0.1356	35.66	-141.61
4	1.6048	-33.956	554.55
5	0.20889	28.86	-152.13

Im Beispiel V

- Somit Schlussresultat

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 22.704t, && 0 \le t \le 10 \\
&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, && 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, && 15 \le t \le 20 \\
&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, && 20 \le t \le 22.5 \\
&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, && 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$



- Bei t=16 s findet man

$$v(16) = -0.1356(16)^2 + 35.66(16) - 141.61 = 394.24 \text{ m/s}$$

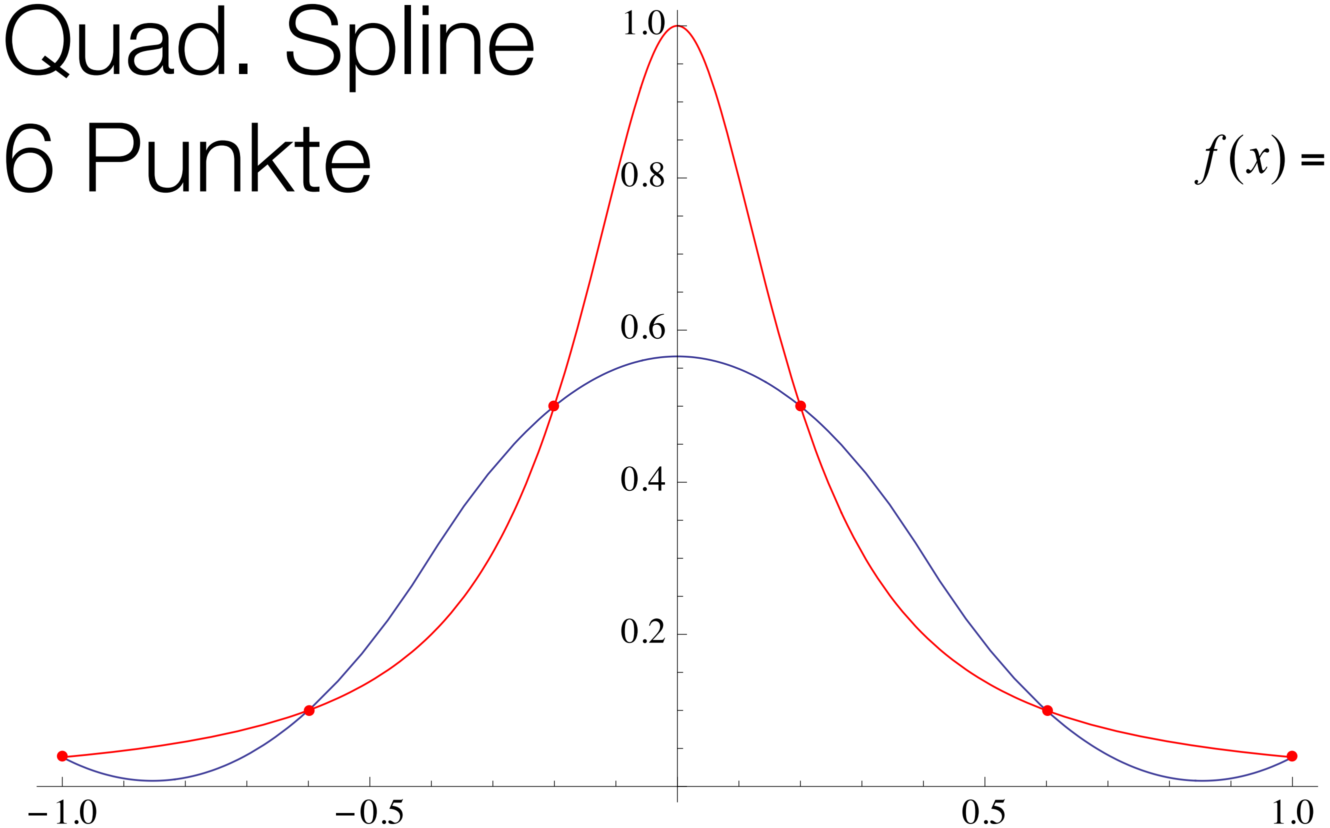
- Fehlerabschätzung

$$|\in_a| = \left|\frac{394.24 - 393.7}{394.24}\right| \times 100$$

$$= 0.1369\%$$

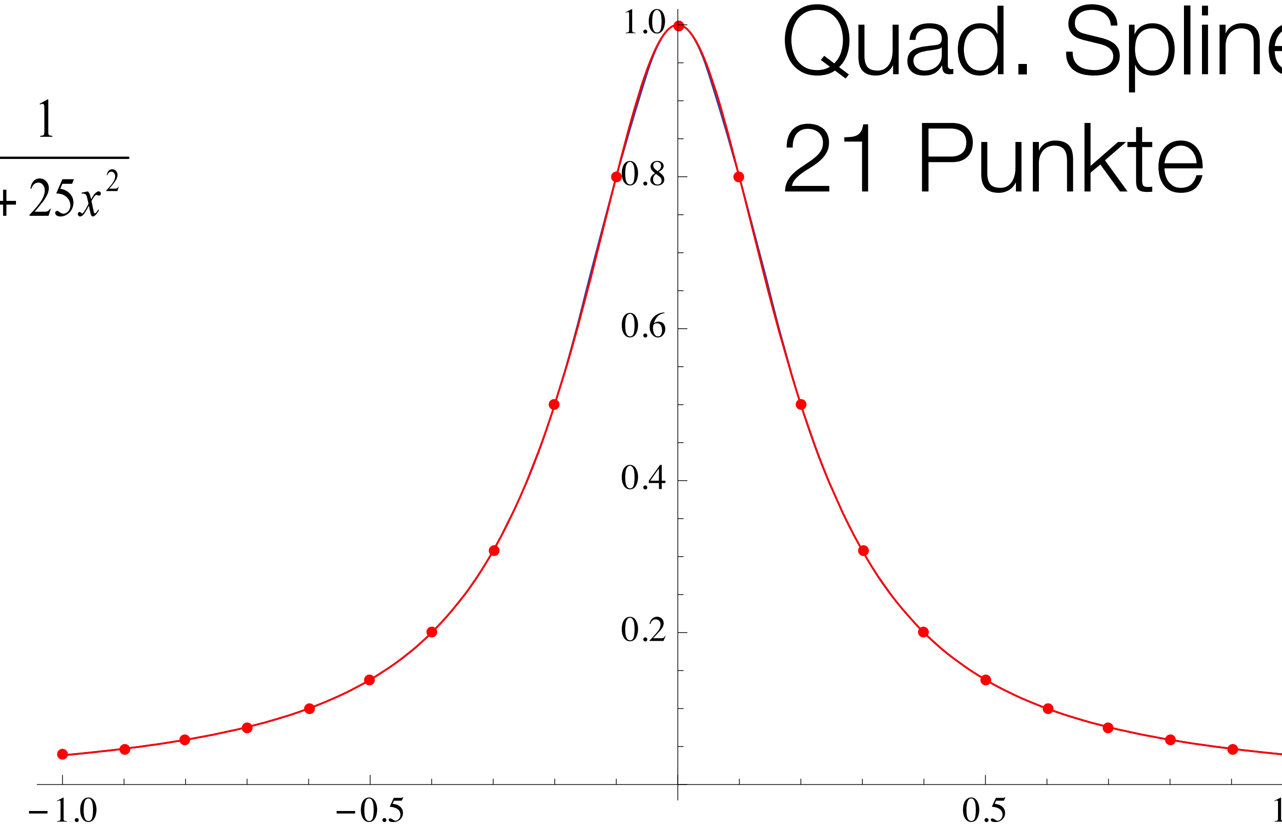
Nochmals Splines vs. Polynome

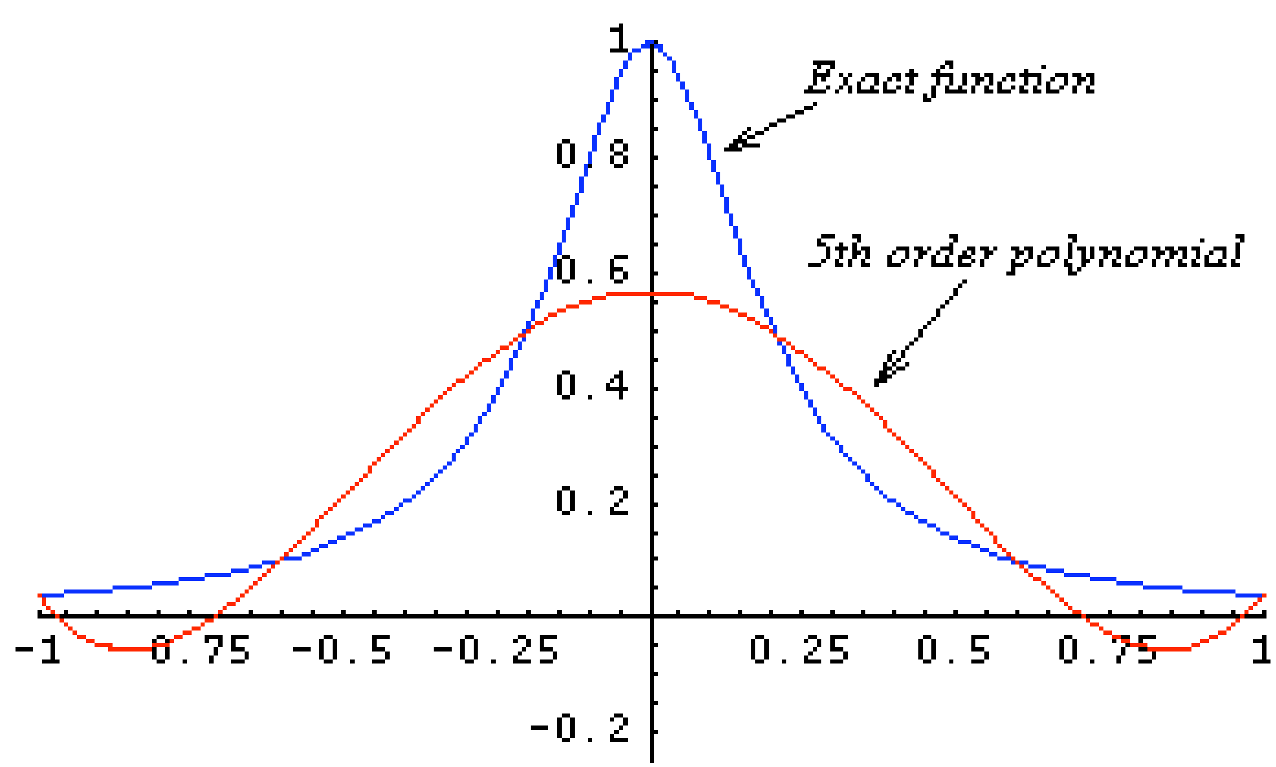
Quad. Spline
6 Punkte

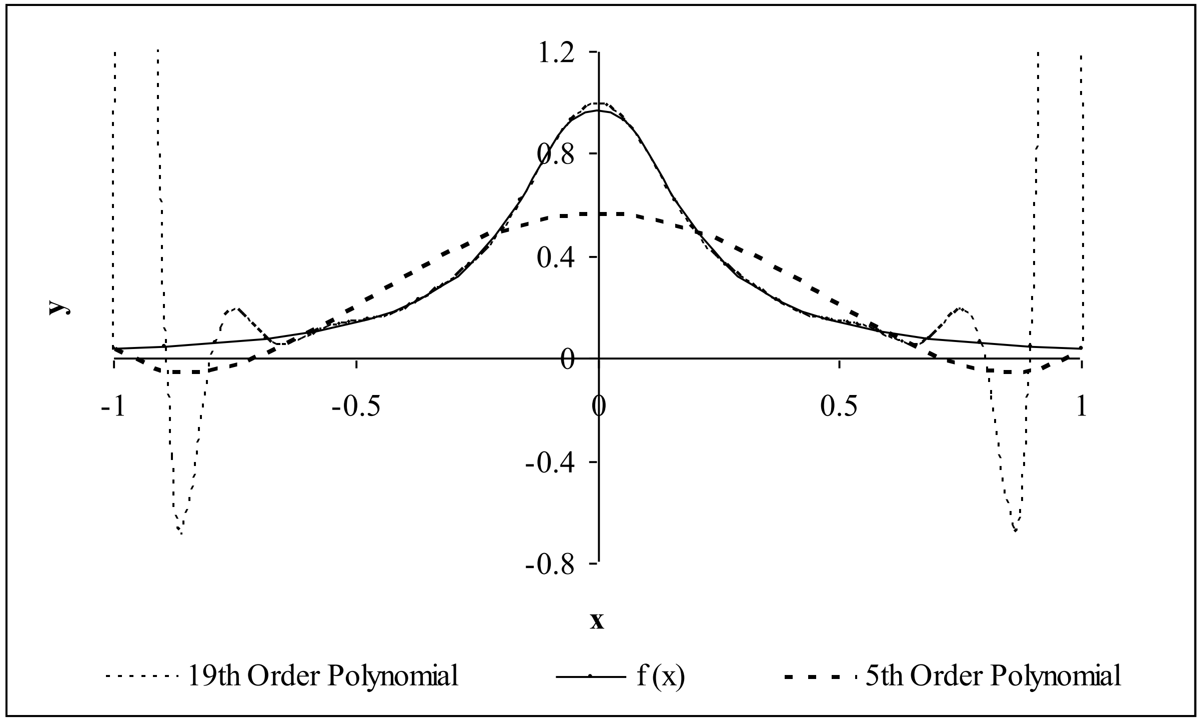


$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Quad. Spline
21 Punkte







Particle in cell…

Fig. 4 Sketch of the nearest grid point (NGP) assignment scheme. This simple binning scheme simply assigns the mass of a particle completely to the one mesh cell in which it falls.

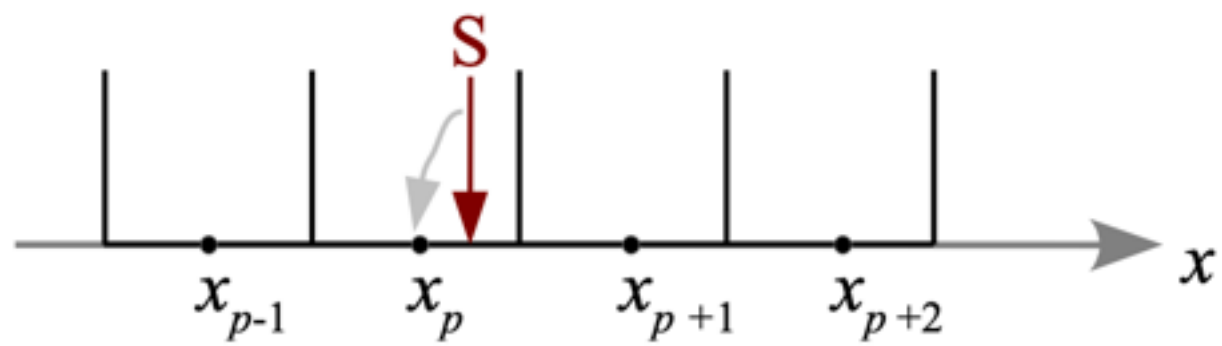


Fig. 5 Sketch of the clouds-in-cell (CIC) assignment scheme. The fraction of mass assigned to a given cell is given by the fraction of the cubical cloud shape of the particle that overlaps with the cell.

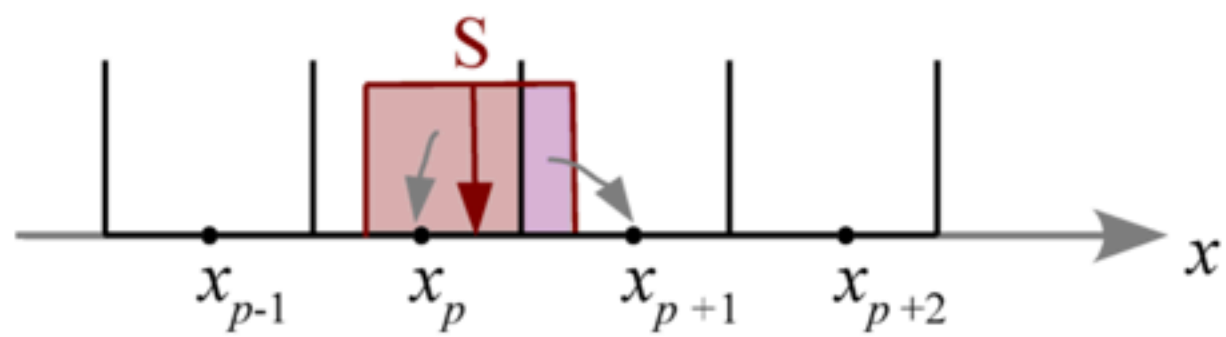
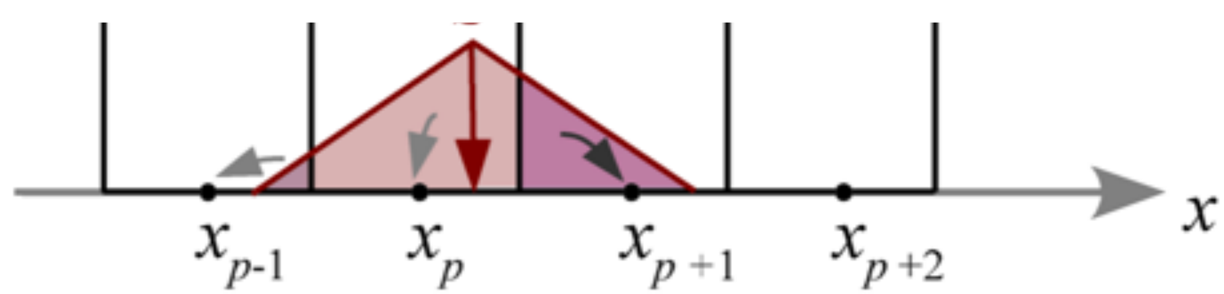


Fig. 7 Sketch of triangular-shaped-clouds (TSC) assignment. Here a particle is spread to three cells in one dimension.



Ressourcen

- Dieses Script basiert auf: http://numericalmethods.eng.usf.edu
von Autar Kaw, Jai Paul

- Wärmstens empfohlen für alle Arten von Numerischen Algorithmen:
Numerical Recipes (2nd/3rd Edition). Press et al., Cambridge University Press
http://www.nr.com/oldverswitcher.html

- **Exercise 1, 10 points**: Newton's Divided Differences for known polynomial

  Write a program that computes the Newtonian divided differences for five points (i.e. up to the fourth divided difference should be used). To test your program, use the polynomial $y = f(x) = 0.1x^4 - x^2$ to compute 5 pairs of points (x, y), $(x = 0, 0.3, 13.0, -4.8, -9.0)$ and compare the original polynomial with the interpolation polynomial by plotting their values (and check the difference).

- **Exercise 2, 10 points**:
  Use your program up to the third divided difference to obtain a fitting polynomial for the four points given (motion of the S2 star in the galactic centre). Compare its results with the direct interpolation polynomial derived in the lecture.

  The data points to be used are (1,1500), (2,1000), (3,800), (4,700), in units of years and km/s. They are approximately taken from the following plot of measurements obtained by Gillessen et al. (2008), with the year 1 defined as the mid-point between 2003 and 2004.